Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

La transformada de Fourier y medidas de Hausdorff

Trabajo de fin de grado

Grado en Matemáticas

Autor: Jaime Gómez Ramírez
Tutora: Ana Mª Vargas Rey

Curso 2020–2021

Resumen

La primera parte de este trabajo trata sobre la medida de Hausdorff y la dimensión de Hausdorff en $\mathbb{R}^n$. Comenzamos definiendo los conceptos básicos y presentando algunas de las propiedades de la medida de Hausdorff, entre otras la relación que mantiene con la medida de Lebesgue, e introducimos el concepto de dimensión de Hausdorff. Continuamos trabajando con semejanzas y conjuntos autosemejantes para obtener un resultado que nos permite afirmar la existencia de este tipo de conjuntos bajo las condiciones apropiadas, y calcular su dimensión. Durante la segunda parte del trabajo, exploramos la relación que mantienen la dimensión de Hausdorff de un conjunto y las integrales de energía de medidas de Borel en $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto que le asignan medida positiva y finita. Esto, junto con ayuda de la teoría de distribuciones, nos permite encontrar una identidad que relaciona las integrales de energía de una medida de Borel con su transformada de Fourier, estableciendo así una relación entre la dimensión de Hausdorff y la transformada de Fourier. La parte final del trabajo combina varios resultados vistos a lo largo de los capítulos anteriores para estudiar un problema geométrico sobre la dimensión de Hausdorff y probar un teorema importante relacionado con la conjetura de Falconer sobre conjuntos de distancias, que establece que si la dimensión de un conjunto de Borel A en $\mathbb{R}^n$ es estrictamente mayor que $n/2$, entonces el conjunto de distancias entre los pares de puntos de A tiene medida de Lebesgue positiva.

Abstract

In this project, we study the Hausdorff measure and Hausdorff dimension in $\mathbb{R}^n$. We begin by presenting the basic concepts and definitions and examining some of the most important properties of the Hausdorff measure, such as its relation with the Lebesgue measure. We later introduce the concept of Hausdorff dimension and work with similarities and self–similar sets in order to prove a result which grants the existence of such sets under specific conditions, along with a way to obtain their Hausdorff dimension. During the second part of the project, we explore the relation between the Hausdorff dimension of a set in $\mathbb{R}^n$ and the energy integrals of Borel measures which provide said set with positive, finite measure. For this part we also make use of some concepts from distribution theory. This allows us to find an identity involving energy integrals of measures and the Fourier transform, thereby establishing a relation between the Hausdorff dimension and the Fourier transform. Lastly, we combine several results seen in previous chapters to study a geometric problem regarding Hausdorff dimension, and we prove an important theorem related to Falconer's distance set conjecture, which states that if a Borel set A in $\mathbb{R}^n$ has Hausdorff dimension strictly greater that $n/2$, then the set of distances between every pair of points in A has positive Lebesgue measure.

Introducción

En ocasiones el estudio de las propiedades geométricas de determinados conjuntos requiere un análisis exhaustivo para el cual la medida de Lebesgue no es suficientemente precisa. Es aquí donde la noción de dimensión de un conjunto comienza a ganar interés. Un ejemplo de esto es el conjunto de Cantor, que si bien contiene una cantidad no numerable de puntos, tiene medida de Lebesgue nula. Esto sugiere que, medido por una medida de "menor dimensión", es posible que este conjunto adquiera medida positiva y finita. Para dar sentido a esta idea se define la medida de Hausdorff, que permite dotar a los conjuntos de $\mathbb{R}^n$ de una dimensión que no necesariamente tiene que ser un número entero. Los conjuntos cuya dimensión no es entera se conocen a menudo como fractales, y dentro de esta familia se encuentran los conjuntos autosemejantes, aquellos que contienen copias de sí mismos. El conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de von Koch, etc. son ejemplos de este tipo de fractales, e incluso en la naturaleza podemos observar estructuras autosemejantes. En la primera parte del trabajo se estudian la medida de Hausdorff y sus propiedades, y los conjuntos autosemejantes, para acabar viendo un resultado que nos permite calcular su dimensión.

El problema de encontrar la dimensión de un conjunto normalmente consiste en acotar su medida para ver que es positiva y finita. Con frecuencia es sencillo acotarla superiormente mediante cubrimientos específicos, como veremos a lo largo del trabajo. Sin embargo, obtener una cota inferior resulta mucho más complicado. En la segunda parte del trabajo se estudia el Lema de Frostman, que convierte este problema en el de encontrar una medida apropiada sobre el conjunto del cual queremos calcular la dimensión. Este lema relaciona una propiedad de densidad de medidas con la dimensión de Hausdorff, lo que resulta muy útil para desarrollar multitud de herramientas que nos servirán a lo largo de todo el trabajo. En particular, gracias a este resultado podemos encontrar una relación entre la dimensión de Hausdorff y la transformada de Fourier.

Finalmente, el último tema que tratamos en el trabajo está relacionado con un problema geométrico sobre la dimensión de Hausdorff y utiliza las herramientas vistas en los capítulos anteriores. Se trata de estimar la dimensión del conjunto de distancias entre los pares de puntos de cierto subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en función de su dimensión. Los resultados que veremos en esta parte están fuertemente relacionados con la conjetura de Falconer sobre conjuntos de distancias, problema que hoy en día sigue abierto y sobre el cual se sigue investigando (ver [2]).

Índice general

1 Medidas de Hausdorff **1**
- 1.1 La medida de Hausdorff . . . 1
- 1.2 Propiedades de la medida de Hausdorff . . . 3
- 1.3 Dimensión de Hausdorff . . . 7
- 1.4 Ejemplos . . . 8
  - 1.4.1 El Conjunto de Cantor . . . 8
  - 1.4.2 El Triángulo de Sierpinski . . . 12
- 1.5 Autosemejanza . . . 12

2 Lema de Frostman e integrales de energía **19**
- 2.1 Convergencia débil . . . 19
- 2.2 El Lema de Frostman . . . 20
- 2.3 Integrales de energía . . . 22

3 Medida de Hausdorff y transformada de Fourier **24**
- 3.1 Transformada de Fourier de medidas y distribuciones temperadas . . . 24
- 3.2 Núcleo de Riesz . . . 25
- 3.3 Transformada de Fourier y energías . . . 27

4 Conjuntos de distancias **30**

Bibliografía **37**

Apéndices **38**

A La medida de Hausdorff y la medida de Lebesgue **39**
- A.1 Teorema 1.7 . . . 39
- A.2 Propiedad 1.12 . . . 41
- A.3 Propiedad 1.11 . . . 44
  - A.3.1 Simetrización de Steiner . . . 44
  - A.3.2 Desigualdad isodiamétrica . . . 46
  - A.3.3 Propiedad 1.11 . . . 47

B El triángulo de Sierpinski **48**

C Distancia de Hausdorff **50**

D La transformada de Fourier **53**
- D.1 Cálculo de la transformada de una función radial . . . 53
- D.2 Estimación del teorema 3.1 . . . 54

CAPÍTULO 1
Medidas de Hausdorff

Este primer capítulo está basado en el capítulo 7 de [10] junto con el capítulo 4 de [8]. En él veremos qué son la medida y la dimensión de Hausdorff, los conjuntos autosemejantes, y las propiedades que relacionan estos distintos objetos.

1.1. La medida de Hausdorff

Definición 1.1 *(Medida exterior de Hausdorff). Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y $\alpha > 0$. Se define la medida exterior de Hausdorff α–dimensional de E como*

$$m_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E),$$

donde

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) = \text{ínf} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_k)^\alpha : \ E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \ \operatorname{diam} F_k < \delta \right\}$$

y $\operatorname{diam} S = \sup \{\|x - y\| : \ x, y \in S\}$.

Una de las primeras cosas por las que podemos preocuparnos es por si existe $m_\alpha^*(E)$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$. Para ello basta con comprobar que existe ese límite.

Observación. $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$ crece conforme decrece δ. Si definimos

$$S_\alpha^\delta(E) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_k)^\alpha : \ E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \ \operatorname{diam} F_k < \delta \right\},$$

está claro que si $\varepsilon < \delta$ entonces $S_\alpha^\varepsilon(E) \subset S_\alpha^\delta(E)$, luego $\text{ínf}\, S_\alpha^\varepsilon(E) \geq \text{ínf}\, S_\alpha^\delta(E)$, o lo que es lo mismo, $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon(E) \geq \mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$. Por tanto, siempre existe $\lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$ (puede ser infinito) y concluimos que siempre está definido $m_\alpha^*(E)$.

En particular esta observación pone de manifiesto que $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq m_\alpha^*(E)$. Además también es sencillo ver que podemos sustituir los cubrimientos de E por cubrimientos por abiertos o por cubrimientos por cerrados. Para verlo vamos a hacer algunas observaciones previas.

Definición 1.2. *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, definimos*

$$A^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, A) < \varepsilon\}.$$

Nótese que para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto A^ε es abierto (dado que la distancia de un punto a un conjunto es una función continua) y $\operatorname{diam} A^\varepsilon \leq \operatorname{diam} A + 2\varepsilon$.

Observación. Si $F \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\operatorname{diam} F = \operatorname{diam} \overline{F}$. La desigualdad $\operatorname{diam} F \leq \operatorname{diam} \overline{F}$ es inmediata, ya que $F \subset \overline{F}$. Para probar la desigualdad contraria, observemos que si $x, y \in \overline{F}$, entonces $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ con $x_n, y_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $d(x, x_n), d(y, y_n) < \varepsilon/2$ si n es suficientemente grande. Así,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y, y_n) \leq \operatorname{diam} F + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, y por tanto $\operatorname{diam} \overline{F} \leq \operatorname{diam} F$.

Proposición 1.3. *Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ y $\alpha > 0$, se tiene*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^\delta_\alpha(E) &= \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^\infty (\operatorname{diam} F_j)^\alpha : \ E \subset \bigcup_{j=1}^\infty F_j, \ \operatorname{diam} F_j < \delta \right\} = \\
&= \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^\infty (\operatorname{diam} C_j)^\alpha : \ E \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j, \ C_j \textit{ cerrado}, \ \operatorname{diam} C_j < \delta \right\} = \\
&= \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^\infty (\operatorname{diam} U_j)^\alpha : \ E \subset \bigcup_{j=1}^\infty U_j, \ U_j \textit{ abierto}, \ \operatorname{diam} U_j < \delta \right\}.
\end{aligned}$$

Demostración. Comenzamos con los recubrimientos por cerrados. Si $\{F_j\}_{j=1}^\infty$ es un recubrimiento de E entonces lo es también $\left\{\overline{F_j}\right\}_{j=1}^\infty$, y además

$$\sum_{j=1}^\infty \operatorname{diam} F_j = \sum_{j=1}^\infty \operatorname{diam} \overline{F_j},$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^\delta_\alpha(E) &= \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^\infty (\operatorname{diam} F_j)^\alpha : \ E \subset \bigcup_{j=1}^\infty F_j, \ \operatorname{diam} F_j < \delta \right\} = \\
&= \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^\infty \left(\operatorname{diam} \overline{F_j}\right)^\alpha : \ E \subset \bigcup_{j=1}^\infty \overline{F_j}, \ E \subset \bigcup_{j=1}^\infty F_j, \ \operatorname{diam} F_j < \delta \right\} \geq \\
&\geq \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^\infty (\operatorname{diam} C_j)^\alpha : \ E \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j, \ C_j \text{ cerrado}, \ \operatorname{diam} C_j < \delta \right\}.
\end{aligned}$$

Cualquier recubrimiento por cerrados C_j cada uno de ellos con diámetro $\operatorname{diam} C_j < \delta$ es un recubrimiento por conjuntos con diámetro menor que δ, luego la desigualdad

contraria también se da. Por tanto,

$$\mathcal{H}^{\delta}_{\alpha}(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} C_j)^{\alpha} : \ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \ C_j \text{ cerrado}, \ \operatorname{diam} C_j < \delta\right\}.$$

Ahora vamos con los recubrimientos por abiertos. Para cada $\delta > 0$ con $\operatorname{diam} F_j < \delta$, dado $\varepsilon > 0$, defino, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_j \leq \frac{1}{2}\,\text{mín}\left\{\left((\operatorname{diam} F_j)^{\alpha} + \frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{1/\alpha} - \operatorname{diam} F_j, \delta - \operatorname{diam} F_j\right\},$$

de manera que para todo $j \in \mathbb{N}$, se tiene $\operatorname{diam} F_j^{\varepsilon_j} < \delta$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\operatorname{diam} F_j^{\varepsilon_j}\right)^{\alpha} \leq \sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} F_j)^{\alpha} + \varepsilon.$$

Dado que los $F_j^{\varepsilon_j}$ son todos abiertos y forman un cubrimiento de E,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\delta}_{\alpha}(E) &\leq \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} U_j)^{\alpha} : \ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j, \ U_j \text{ abierto}, \ \operatorname{diam} U_j < \delta\right\} \leq \\ &\leq \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\operatorname{diam} F_j^{\varepsilon_j}\right)^{\alpha} : \ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j, \ \operatorname{diam} F_j < \delta\right\} \leq \\ &\leq \mathcal{H}^{\delta}_{\alpha}(E) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Así,

$$\mathcal{H}^{\delta}_{\alpha}(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} U_j)^{\alpha} : \ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j, \ U_j \text{ abierto}, \ \operatorname{diam} U_j < \delta\right\}.$$

□

1.2. Propiedades de la medida de Hausdorff

A continuación vamos a enunciar y demostrar algunas propiedades particulares de la medida exterior de Hausdorff.

Proposición 1.4 *(Monotonía). Si $E_1 \subset E_2$ entonces $m^*_{\alpha}(E_1) \leq m^*_{\alpha}(E_2)$.*

Demostración. Cualquier cubrimiento de E_2 es cubrimiento de E_1 y por tanto (utilizando la notación de la primera observación) $S^{\delta}_{\alpha}(E_2) \subset S^{\delta}_{\alpha}(E_1)$. Tomando ínfimos y límites cuando $\delta \to 0^+$ se tiene. □

Proposición 1.5 *(Subaditividad). Para toda $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ familia contable de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, se tiene*

$$m_\alpha^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_\alpha^*(E_j).$$

Demostración. Dado $\delta > 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$ se considera un recubrimiento $\{F_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ de E_j con $\operatorname{diam} F_{j,k} < \delta$, de manera que $\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{diam} F_{j,k})^\alpha \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j) + \varepsilon/2^j$ (lo podemos tomar así por ser $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j)$ el ínfimo de esas sumas). Como $\{F_{j,k}\}_{j,k}$ es un cubrimiento de $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ por conjuntos con diámetro menor que δ, se tiene

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_{j,k})^\alpha \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j) + \varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$, luego $\mathcal{H}_\alpha^\delta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j)$, y tomando límites cuando $\delta \to 0^+$ concluye la prueba. □

Proposición 1.6. *Sean $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ tales que $d(E_1, E_2) > 0$. Entonces*

$$m_\alpha^*(E_1 \cup E_2) = m_\alpha^*(E_1) + m_\alpha^*(E_2).$$

Demostración. Por ser $d(E_1, E_2) > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(E_1, E_2) = \varepsilon$ y también $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Sea $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ un cubrimiento de $E_1 \cup E_2$ con $\operatorname{diam} F_k < \varepsilon$. Entonces $\{F_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ es un cubrimiento de E_1 y $\{F_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ es un cubrimiento de E_2, con $F_k^i = F_k \cap E_i$, $i = 1, 2$, y $\operatorname{diam} F_k^i < \varepsilon$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\operatorname{diam} F_k^1\right)^\alpha + \left(\operatorname{diam} F_k^2\right)^\alpha \leq (\operatorname{diam} F_k)^\alpha,$$

ya que o bien $F_k^1 = \emptyset$ o bien $F_k^2 = \emptyset$, y $\operatorname{diam}\emptyset = 0$ (si $F_k^i \neq \emptyset$ para ambos $i = 1, 2$, entonces existen $a \in E_1$ y $b \in E_2$ con $a, b \in F_k$, luego $d(a, b) < \varepsilon < d(E_1, E_2)$ y llegamos a una contradicción). Con esto se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{diam} F_k^1\right)^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{diam} F_k^2\right)^\alpha \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_k)^\alpha,$$

y como $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_k^i)^\alpha$, basta tomar ínfimos en la expresión de arriba para llegar a

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E_1) + \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_2) \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_1 \cup E_2).$$

Tomando límites cuando $\delta \to 0^+$ se tiene la desigualdad

$$m_\alpha^*(E_1) + m_\alpha^*(E_2) \leq m_\alpha^*(E_1 \cup E_2).$$

La desigualdad contraria sale gracias a la subaditividad. □

Hasta ahora las propiedades 1.4 y 1.5 nos garantizan que m_α^* es una medida exterior sobre $\mathbb{R}^n$, y como este es un espacio métrico y también se cumple la propiedad 1.6, entonces m_α^* es una medida exterior métrica. En particular esto quiere decir que los

conjuntos de Borel son medibles (y m_α^* es una medida sobre la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$), tal y como afirma el siguiente teorema, cuya demostración queda en el apéndice A.

Teorema 1.7. *Si X es un espacio métrico y μ^* es una medida exterior métrica sobre X entonces los conjuntos de Borel son μ^*-medibles.*

Conviene señalar que no vamos a intentar encontrar la mayor familia de conjuntos medibles por la medida exterior de Hausdorff, y trabajaremos habitualmente con la σ–álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$. Además, si E es un boreliano, denotaremos $m_\alpha^*(E)$ por $m_\alpha(E)$, la medida de Hausdorff α–dimensional de E o simplemente medida de Hausdorff de E (dado que los borelianos son medibles). A continuación seguimos exponiendo más propiedades.

Proposición 1.8 *(Aditividad numerable). Si $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ es una familia contable de borelianos disjuntos entonces*

$$m_\alpha\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) = \sum_{j=1}^\infty m_\alpha(E_j).$$

Demostración. Dado que los borelianos son medibles, se tiene por la definición de medida. □

Proposición 1.9. *La medida de Hausdorff es invariante por traslaciones*

$$m_\alpha(E+h) = m_\alpha(E) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

y rotaciones

$$m_\alpha(r(E)) = m_\alpha(E) \quad r \text{ rotación en } \mathbb{R}^n,$$

y se comporta bajo dilataciones de la siguiente manera

$$m_\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha m_\alpha(E) \quad \forall \lambda > 0.$$

Demostración. La primera y la segunda parte se deducen de que las traslaciones y las rotaciones son ambas isometrías, y por tanto $\operatorname{diam} F + h = \operatorname{diam} F$ y $\operatorname{diam} r(F) = \operatorname{diam} F$. La tercera parte se deduce de que $(\operatorname{diam} \lambda F)^\alpha = \lambda^\alpha (\operatorname{diam} F)^\alpha$. □

Proposición 1.10. *Si $\alpha = 0$, $m_0(E)$ cuenta la cantidad de puntos de E y $m_1^*(E) = m(E)$ si $E \subset \mathbb{R}$.*

Demostración. Para la primera parte consideramos $A = \bigcup_{a\in A}\{a\}$ y vemos que $\mathcal{H}_0^\delta(\{a\}) = 1$. El resultado se obtiene aplicando la propiedad 1.6.

Para demostrar la segunda parte se demuestran cada una de las desigualdades. Para la primera, sólo hay que notar que para todo $\delta > 0$ se tiene

$$m(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^\infty \operatorname{diam} I_k : \ E \subset \bigcup_{k=1}^\infty I_k\right\} \leq \mathcal{H}_1^\delta(E).$$

Para la segunda basta con observar que podemos tomar $I_k = [k\delta, (k+1)\delta]$, $k \in \mathbb{Z}$ con $\operatorname{diam} I_k = \delta$. Así, $\operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \delta$ y por tanto $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \operatorname{diam} C_j$. De esta manera se tiene

$$m(E) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam} C_j : \ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\} \geq$$
$$\geq \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) : \ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\} \geq \mathcal{H}_1^{\delta}(E).$$

□

Las siguientes dos propiedades ilustran la relación que hay entre la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, que denotamos por m, y la medida n–dimensional de Hausdorff.

Proposición 1.11. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un boreliano. Entonces $c_n m_n(E) = m(E)$ donde c_n es la constante $m(B)/(\operatorname{diam} B)^n$ y B es la bola de radio 1 en $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 1.12. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un boreliano. Entonces:*

$$c_n m_n(E) \leq m(E) \leq 2^n c_n m_n(E)$$

Las demostraciones de ambas propiedades requieren cierto trabajo previo. En particular, para demostrar la proposición 1.11 es necesario utilizar la desigualdad isodiamétrica, que establece que de entre todos los conjuntos con diámetro d, la bola (de diámetro d) es la de mayor volumen. La demostración de esta desigualdad pasa por muchos conceptos que únicamente necesitaremos en esta parte del trabajo, y que se pueden encontrar a lo largo de la sección 2.2 de [4]. Por ello, todos los resultados necesarios para entender las demostraciones de ambas propiedades quedan en el apéndice A junto con la demostración de la proposición 1.11. A continuación demostramos únicamente la proposición 1.12.

Demostración (Proposición 1.12). Utilizando el lema A.4, para cada $\varepsilon, \delta > 0$ podemos encontrar un cubrimiento $\{B_j\}$ de E por bolas de diámetro $\operatorname{diam} B_j < \delta$ y con $\sum_j m(B_j) \leq m(E) + \varepsilon$. Así,

$$\mathcal{H}_n^{\delta}(E) \leq \sum_j (\operatorname{diam} B_k)^n = \sum_j m(B_j) \frac{(\operatorname{diam} B_j)^n}{m(B_j)} =$$
$$= c_n^{-1} \sum_j m(B_j) \leq c_n^{-1}(m(E) + \varepsilon),$$

y haciendo que $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to 0$ se tiene $m_n(E) \leq c_n^{-1} m(E)$.

Para la desigualdad contraria consideramos $\{F_j\}_j$ un cubrimiento de E que cumple $\sum_j (\operatorname{diam} F_j)^n \leq m_n(E) + \varepsilon$. Dado que los conjuntos F_j son acotados, para cada uno de ellos podemos encontrar una bola B_j de diámetro $\operatorname{diam} B_j = 2 \operatorname{diam} F_j$ y tal que

$F_j \subset B_j$. Además $\{B_j\}$ también es un cubrimiento de E. Por tanto

$$m(E) \leq \sum_j m(B_j) = 2^n c_n \sum_j (\operatorname{diam} F_j)^n \leq 2^n c_n (m_n(E) + \varepsilon)$$

y haciendo que $\varepsilon \to 0$ se tiene $m(E) \leq 2^n c_n m_n(E)$. □

Por último, la siguiente propiedad es de gran importancia, ya que permite definir el concepto de dimensión de Hausdorff de un conjunto.

Proposición 1.13. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y $\alpha < \beta$. Entonces*

I . $m_\alpha^*(E) < \infty \Longrightarrow m_\beta^*(E) = 0$.

II . $m_\beta^*(E) > 0 \Longrightarrow m_\alpha^*(E) = \infty$.

Demostración. Si $\operatorname{diam} F_k < \delta$ y $\alpha < \beta$, entonces

$$(\operatorname{diam} F_k)^\beta = (\operatorname{diam} F_k)^{\beta-\alpha} (\operatorname{diam} F_k)^\alpha \leq \delta^{\beta-\alpha} (\operatorname{diam} F_k)^\alpha,$$

y tomando ínfimos sobre los cubrimientos se tiene

$$\mathcal{H}_\beta^\delta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha} m_\alpha^*(E).$$

En *I*, al ser $m_\alpha^*(E) < \infty$ y $\beta - \alpha > 0$, dejando $\delta \to 0$ se tiene $m_\beta(E) = 0$. Para demostrar *II* se observa el contrarrecíproco de *I*. □

Antes de finalizar la sección, vamos a hacer algunas observaciones sencillas que se deducen de las propiedades que acabamos de ver.

1. Si Q es un k-cubo en $\mathbb{R}^n$ entonces $0 < m_k(Q) < \infty$.
2. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces $m_n(A) > 0$ y por tanto $m_\alpha(A) = \infty$ si $\alpha < n$.
3. Para cualquier boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$, si $\alpha > n$ entonces $m_\alpha(A) = 0$ para todos los abiertos $A \subset \mathbb{R}^n$ que cubren E, y por tanto $m_\alpha(E) = 0$.

1.3. Dimensión de Hausdorff

De la propiedad 1.13 podemos deducir que, dado un boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$, existe un único $\alpha \geq 0$ tal que

$$m_\beta(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{si } \beta > \alpha \end{cases}$$

Esto es lo que motiva la siguiente definición.

Definición 1.14 *(Dimensión de Hausdorff). Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un boreliano. Se define la dimensión de Hausdorff de E como*

$$\dim E = \text{ínf}\left\{\beta : \ m_\beta(E) = 0\right\}.$$

Para $\alpha = \dim E$ lo único que podemos afirmar sobre la medida de Hausdorff de E es que $0 \leq m_\alpha(E) \leq \infty$. Si las desigualdades son estrictas, se dice que E tiene dimensión de Hausdorff estricta α. De hecho, es fácil observar que si para cierto α se tiene $0 < m_\alpha(E) < \infty$ entonces tiene que ser $\alpha = \dim E$. A menudo, para probar que α es la dimensión de un conjunto E, comprobaremos que $0 < m_\alpha(E) < \infty$.

Diremos que un conjunto con dimensión de Hausdorff fraccionaria es un fractal. Lo que exponemos a continuación son un par de ejemplos de fractales y del cálculo de sus dimensiones.

1.4. Ejemplos

1.4.1. El Conjunto de Cantor

El primer ejemplo es el del conjunto de Cantor, $\mathcal{C}$, que se construye eliminando en cada paso los tercios centrales de los intervalos que quedan del paso anterior, comenzando con el intervalo $[0, 1]$.

Definición 1.15. *El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ resulta de la siguiente construcción.*

- *Sea $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, entonces construimos $\mathcal{C}_1$ dividiendo $\mathcal{C}_0$ en tres partes iguales y eliminando el intervalo abierto central (A_1^1).*
- *$\mathcal{C}_1 = C_1^1 \cup C_2^1$, $C_1^1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $C_2^1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y construimos $\mathcal{C}_2$ dividiendo cada uno de los intervalos anteriores en tres partes y eliminando el intervalo abierto interior en cada uno de ellos (A_j^2 $j = 1, 2$). Queda $\mathcal{C}_2 = C_1^2 \cup C_2^2 \cup C_3^2 \cup C_4^2$.*
- *$\mathcal{C}_j$ es la unión de 2^j intervalos cerrados de longitud 3^{-j} (C_k^j $k = 1, ..., 2^j$). Para construir $\mathcal{C}_{j+1}$ dividimos cada uno de esos intervalos en tres y eliminamos el intervalo abierto central de cada uno de ellos (A_l^j $l = 1, ..., 2^{j-1}$).*

El conjunto de Cantor es

$$\mathcal{C} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_j.$$

Observación. $\mathcal{C}$ es intersección de compactos (y en particular cerrados), de manera que es cerrado, y como $\mathcal{C} \subset [0, 1]$, es además compacto y no vacío.

Lo que vamos a demostrar más adelante es que $\dim \mathcal{C} = \log 2 / \log 3$, y para ello vamos a necesitar tratar con la función de Cantor–Lebesgue, que se construye sobre el conjunto de Cantor manteniéndose constante sobre los abiertos que se van eliminando en cada

paso de la construcción de $\mathcal{C}$ e interpolando linealmente sobre los conjuntos $\mathcal{C}_j$. Esta es una de muchas definiciones equivalentes, y es la que más útil resulta para lo que queremos hacer.

Definición 1.16. *La función de Cantor–Lebesgue se construye de la siguiente manera. Para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$F_k(x) = \begin{cases} \frac{2l-1}{2^j} 1_{A_l^j}(x),\ l = 1, ..., 2^{j-1} & \text{para cada } j \leq k \\ f_l^k(x) & \text{para cada } l \leq 2^k \end{cases}$$

donde $f_l^k(x) : C_l^k \longrightarrow [0,1]$ cumplen $f_1^k(0) = 0$ y $f_{2^k}^k(1) = 1$, son lineales, crecientes y hacen que F_k sea continua. Entonces la función de Cantor–Lebesgue es F y

$$F(x) = \lim_{k\to\infty} F_k(x).$$

Observación. Por la construcción de F,

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n-1} \quad \forall x \in [0,1], \tag{1.1}$$

de manera que

$$|F_{n+k}(x) - F_n(x)| \leq \sum_{j=1}^{k} |F_{n+j}(x) - F_{n+j-1}(x)| \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{n+j}} =$$
$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n} \left(1 - 2^{-(k-1)}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Es decir, si $m > n$,

$$|F_m(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}. \tag{1.2}$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < \varepsilon$, y si tomamos $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n > N$ entonces $|F_m(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n} \leq 2^{-N} < \varepsilon$, luego $\{F_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por tanto es convergente. Así $F_n \to F$ uniformemente conforme $n \to \infty$ y F es continua.

Además, como $[0,1]$ es conexo, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ y F es continua, $F([0,1]) = [0,1]$ y F es sobreyectiva. De hecho, F envía $\mathcal{C}$ en $[0,1]$. Veámoslo.

Si $y \in [0,1]$ es de la forma $y = \frac{m}{2^k}$ con $0 < m < 2^k$, existen $j \leq k$ y $0 < l < 2^j$ tales que para algún $x \in A_l^j$, se tiene $y = F(x)$, y por tanto también existe otro $\bar{x} \in \bar{A}_l^j$ (en el extremo del intervalo) que cumple $\bar{x} \in \mathcal{C}$ y $F(\bar{x}) = y$. Por otro lado, si y no es de esa forma, entonces al ser F sobreyectiva, existe $x \in [0,1]$ tal que $F(x) = y$, pero no puede ser $x \in A_l^k$ para ningún $k \in \mathbb{N}$ ni $l = 1, ..., 2^{k-1}$, pues si lo fuera entonces $y = \frac{m}{2^k}$. Así x tiene que estar en $\mathcal{C}$. Por tanto $F(\mathcal{C}) = [0,1]$.

En particular acabamos de probar que F es una función de distribución de una medida de probabilidad en $[0,1]$ que dota al conjunto de Cantor (que es de medida de Lebesgue 0) de toda la probabilidad.

Nota. Antes de continuar, vamos a aclarar (1.1). Dado $k \in \mathbb{N}$ y $x \in [0,1]$ distinguimos los siguientes casos.

- Si $x \in A_l^j$ para algún $j \leq k$ y $0 < l < 2^{j-1}$ entonces

$$F_{k+1}(x) = F_k(x) \Longrightarrow |F_{k+1}(x) - F_k(x)| = 0 \leq 2^{-(k+1)}.$$

- Si $x \in A_l^{k+1}$ pero $x \notin A_l^j$ para todo $j \leq k$ y ningún $l = 1, ..., 2^{j-1}$ entonces $x \in \mathcal{C}_k$. Así, $F_{k+1}(x) = \frac{2l-1}{2^{k+1}}$ para algún l y $\frac{l-1}{2^k} \leq F_k(x) \leq \frac{l}{2^k}$, luego

$$|F_{k+1}(x) - F_k(x)| \leq \text{máx}\left\{\frac{2l-1}{2^{k+1}} - \frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k} - \frac{2l-1}{2^{k+1}}\right\} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

- Si no, entonces $x \in \mathcal{C}_{k+1}$, de manera que $x \in \mathcal{C}_k$ y por tanto pueden ocurrir dos cosas distintas:

  - $F_{k+1}(x) \leq F_k(x)$ y $F_{k+1}(x) \geq \frac{2l}{2^{k+1}}$, $F_k(x) \leq \frac{2l-1}{2^{k+1}}$.
  - $F_{k+1}(x) \geq F_k(x)$ y $F_{k+1}(x) \leq \frac{2l-1}{2^{k+1}}$, $F_k(x) \geq \frac{2l-2}{2^{k+1}}$.

  Estimando y juntando ambos casos se obtiene

$$|F_{k+1}(x) - F_k(x)| \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

De manera que la desigualdad se cumple para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in [0,1]$.

Ahora que sabemos que F lleva $\mathcal{C}$ en $[0,1]$, para poder calcular la dimensión de Hausdorff de $\mathcal{C}$ va a ser necesario trabajar con el concepto de función Lipschitz. En general se puede definir lo que es una función Lipschitz entre dos espacios métricos, pero para lo que necesitamos nosotros veremos el caso en que esos espacios son $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual.

Definición 1.17. *Una función $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ es Lipschitz (o satisface una condición Lipschitz) de exponente γ (o es Hölder γ) si existe $M > 0$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|^\gamma \quad \forall x, y \in E.$$

También vamos a necesitar el siguiente lema.

Lema 1.18. *Si f es una función Lipschitz de exponente γ definida sobre un compacto E, entonces*

$$m_\beta\left(f(E)\right) \leq M^\beta m_\alpha(E),$$

donde $\beta = \alpha/\gamma$.

Demostración. Supongamos que $\{F_k\}_{k\in K}$ es un cubrimiento finito de E (que es compacto). Entonces $\{f(F_k \cap E)\}_{k\in K}$ cubre $f(E)$ y como f es Lipschitz de exponente γ

en E, se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{diam} f(F_k \cap E) &= \sup\{|f(x)-f(y)| : \ x,y \in F_k \cap E\} \leq \\ &\leq \sup\{M|x-y|^\gamma : \ x,y \in F_k \cap E\} = \\ &= M\left(\operatorname{diam} f(F_k \cap E)\right)^\gamma .\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{k\in K} \left(\operatorname{diam} f(E \cap F_k)\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \leq M^{\frac{\alpha}{\gamma}} \sum_{k\in K} \left(\operatorname{diam} E \cap F_k\right)^\alpha ,$$

y tomando ínfimos en el conjunto de cubrimientos con diámetro $\leq \delta$ y límite cuando $\delta \to 0$, se tiene

$$m_{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(f(E)\right) \leq M^{\frac{\alpha}{\gamma}} m_\alpha(E).$$

□

Lema 1.19. *La función de Cantor–Lebesgue es Lipschitz con* $\gamma = \log 2/\log 3$.

Demostración. La función F_n crece, en cada intervalo de longitud 3^{-n}, una altura de 2^{-n}, y en A_l^j es constante, de manera que su pendiente está acotada por $2^{-n}/3^{-n} = (3/2)^n$

$$|F_n(x) - F_n(y)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x-y|.$$

Tomando límites en m en (1.2) se tiene $|F(x) - F_n(x)| \leq 1/2^n$, que junto con la estimación anterior queda

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)| &\leq |F(x)-F_n(x)| + |F_n(x)-F_n(y)| + |F(y)-F_n(y)| \leq \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x-y| + \frac{2}{2^n} = \frac{3^n|x-y|+2}{2^n}.\end{aligned}$$

Para cada x e y fijos elegimos n tal que

$$3^{n-1} \leq \frac{1}{|x-y|} \leq 3^n \iff 1 \leq 3^n|x-y| \leq 3,$$

de manera que

$$|F(x)-F(y)| \leq \frac{3+2}{2^n} = \frac{5}{3^{\gamma n}} \leq M|x-y|^\gamma.$$

□

Teorema *(Dimensión de $\mathcal{C}$). El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ tiene dimensión de Hausdorff* $\alpha = \log 2/\log 3$.

Demostración. Para demostrarlo, es necesario comprobar que $0 < m_\alpha(\mathcal{C}) < \infty$ con $\alpha = \log 2/\log 3$.

Para la primera desigualdad basta ver que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_k$ es un cubrimiento de $\mathcal{C}$. Para cada $\delta > 0$ tomamos $K \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande como para que

$3^{-K} < \delta$, y como $\mathcal{C}_K$ es la unión de los C_j^k con $j = 1, ..., 2^k$ y cada uno de ellos tiene diámetro 3^{-K}, entonces estos son un cubrimiento de $\mathcal{C}$ de diámetro menor que δ, y por tanto

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta \leq 2^K (3^K)^\alpha = 1^K = 1,$$

obteniendo así $m_\alpha(\mathcal{C}) \leq 1 < \infty$.

Para la desigualdad contraria, vemos que por ser $\mathcal{C}$ un conjunto compacto y dado que F es Lipschitz de exponente $\gamma = \log 2/\log 3$ y $F(\mathcal{C}) = [0, 1]$, se obtiene del lema 1.18,

$$m_1([0, 1]) \leq M m_\alpha(\mathcal{C}),$$

luego

$$0 < \frac{1}{M} \leq m_\alpha(\mathcal{C}).$$

□

1.4.2. El Triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinksi, $\mathcal{S}$, es un conjunto en el plano que se construye de manera similar al conjunto de Cantor. Comienza con un triángulo equilátero de lado 1 y en cada paso se va eliminando el triángulo central de cada triángulo del paso anterior. En el paso k se obtiene un conjunto compacto $\mathcal{S}_k$ y el triángulo de Sierpinski es la intersección de todos ellos

$$\mathcal{S} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_k,$$

y por tanto es también un conjunto compacto. Además, cada $\mathcal{S}_k$ es unión de 3^k triángulos equiláteros (cerrados) de lado 2^{-k}.

La dimensión de Hausdorff de $\mathcal{S}$ es $\log 3/\log 2$. Para demostrarlo se sigue una estructura similar a la que utilizaremos para probar un teorema importante más adelante. Por esta razón, dejamos esta prueba en el apéndice B.

1.5. Autosemejanza

En los dos ejemplos anteriores, los conjuntos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{S}$ son autosemejantes. Este tipo de conjuntos se caracteriza por tener copias de ellos mismos contenidas dentro. El conjunto de Cantor está formado por dos copias de sí mismo, una en $[0, 1/3]$ y otra en $[2/3, 1]$, y el triángulo de Sierpinski también tiene copias de sí mismo, una en cada uno de los triángulos que aparecen en $\mathcal{S}_1$. Lo mismo ocurre dentro de estas copias: cada una está formada por copias del conjunto, y a la vez estas copias están formadas por más copias, y podemos seguir así hasta donde queramos. En general, cada paso de la construcción de estos dos conjuntos admite copias (dilatadas) del conjunto.

Para terminar el capítulo, vamos a dedicar esta sección a estudiar el concepto de autosemejanza para ver cómo trabajar con estos conjuntos y finalmente encontrar su dimensión de Hausdorff.

Definición 1.20 *(Semejanza). Una función* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una semejanza de razón* $r > 0$ *si*

$$\|S(x) - S(y)\| = r\|x - y\|.$$

Se puede demostrar que una semejanza es la composición de una traslación, una rotación y una homotecia de razón r.

Definición 1.21 *(Conjunto autosemejante). Dadas* $S_1, ..., S_m$ *semejanzas de razón común* $r > 0$*, decimos que el conjunto* $F \subset \mathbb{R}^n$ *es autosemejante si*

$$F = S_1(F) \cup ... \cup S_m(F).$$

Vamos a ver cómo los dos conjuntos que hemos tratado en la sección anterior son autosemejantes encontrando las semejanzas asociadas a cada conjunto.

Ejemplo. El conjunto de Cantor es autosemejante por las semejanzas

$$S_1(x) = \frac{x}{3} \quad \text{y} \quad S_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$$

ambas de razón $r = 1/3$.

Para el triángulo de Sierpinski, si del triángulo inferior izquierdo de $\mathcal{S}_1$ situamos su vértice inferior izquierdo en el origen, y denotamos su vértice superior como α y su vértice inferior derecho como β, entonces se ve que $\mathcal{S}$ es autosemejante por las semejanzas

$$S_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad S_2(x, y) = \alpha + \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad S_3(x, y) = \beta + \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

Ahora podemos pensar si cuando tenemos m semejanzas de razón r necesariamente habrá conjuntos autosemejantes por esas semejanzas, y en el caso de que los haya, si habrá uno o más de estos. Para ver esto vamos a trabajar con un par de lemas y el concepto de distancia de Hausdorff.

Lema 1.22. *Dadas* $S_1, ..., S_m$ *semejanzas de razón* $r > 0$*, existe una bola* B *tal que* $S_j(B) \subset B$ *para todo* $j = 1, ..., m$.

Antes de demostrar este resultado, observemos que este lema nos da una idea de que para construir el conjunto F autosemejante que queremos, dadas las m semejanzas, podemos empezar con B e ir aplicando las semejanzas a B hasta reducirlo a un conjunto F que quede invariante por estas.

Demostración (Lema 1.22). Si S es una semejanza de razón r entonces

$$\|S(x)\| \leq \|S(x) - S(0)\| + \|S(0)\| = r\|x\| + \|S(0)\|.$$

Si R es el radio de la bola que deseamos encontrar, queremos que $\|x\| \leq R$ implique $\|S(x)\| \leq R$. Basta tomar R tal que

$$rR + \|S(0)\| \leq R,$$

es decir, $R \geq \|S(0)\|/(1-r)$. Así para cada $j = 1, ..., m$ obtenemos B_j centrada en el origen, tal que $S(B_j) \subset B_j$. Podemos tomar B como la bola de mayor radio de entre las bolas B_j para tener $S_j(B) \subset B$. □

Definición 1.23. *Dadas $S_1, ..., S_m$ semejanzas de razón $r > 0$, y dado $A \subset \mathbb{R}^n$, se define la aplicación $\tilde{S} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ con $\tilde{S}(A) = S_1(A) \cup ... \cup S_m(A)$.*

Es fácil comprobar que si $A \subset A' \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\tilde{S}(A) \subset \tilde{S}(A')$. Ahora vamos a trabajar un poco con la distancia de Hausdorff, que se puede definir para espacios métricos en general, pero nosotros la definiremos para $\mathbb{R}^n$. Previo a ello conviene recordar la definición 1.2.

Definición 1.24 *(Distancia de Hausdorff). Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Se define su distancia de Hausdorff como*

$$d_H(A, B) = \text{ínf}\left\{\delta : \ A \subset B^\delta \ y \ B \subset A^\delta\right\}.$$

Observación. Podemos definir d_H de otra manera distinta que será muy útil a la hora de demostrar sus propiedades. Primero observamos que

$$\begin{aligned}\text{ínf}\left\{\delta : \ A \subset B^\delta\right\} = \text{ínf}\left\{\delta : \ \sup\left\{d(a, B) : \ a \in A\right\} < \delta\right\} = \\ = \sup\left\{d(a, B) : \ a \in A\right\},\end{aligned}$$

y por tanto la distancia de Hausdoff se puede definir de la siguiente manera

$$d_H(A, B) = \text{máx}\left\{\sup\left\{d(a, B) : \ a \in A\right\}, \sup\left\{d(b, A) : \ b \in B\right\}\right\}.$$

Proposición 1.25 *(Propiedades de d_H). Sean $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ compactos y $S_1, ..., S_m$ semejanzas de razón $r > 0$ en $\mathbb{R}^n$.*

I. $d_H(A, B) = 0 \iff A = B$.

II. $d_H(A, B) = d_H(B, A)$.

III. $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$.

IV. $d_H(\tilde{S}(A), \tilde{S}(B)) \leq r d_H(A, B)$.

La demostración de estas propiedades consiste en utilizar la definición 1.24 y manejar supremos e ínfimos apropiadamente para conseguir las relaciones que nos interesan. Por ello, queda en el apéndice C.

Llegados a este punto podemos hablar sobre la existencia de un conjunto F autosemejante dadas las m semejanzas de razón r. Aplicándolas de manera iterada a la bola del lema 1.22, podemos ver que la propiedad *IV* de la proposición 1.25 nos da a entender que r tiene que ser menor que 1.

Teorema 1.26. *Sean $S_1, ..., S_m$ semejanzas de razón $0 < r < 1$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe un único conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ compacto y no vacío tal que*

$$F = S_1(F) \cup ... \cup S_m(F).$$

Demostración. Comenzamos probando la parte de existencia. Empezamos eligiendo B (cerrada) como la del lema 1.22, y denotamos

$$\begin{aligned} F_1 &= \tilde{S}(B) \\ F_2 &= \tilde{S} \circ \tilde{S}(B) \\ F_k &= \tilde{S}^k(B) = \tilde{S} \circ \underset{k)}{...} \circ \tilde{S}(B). \end{aligned}$$

Como S_i es continua $(i = 1, ..., m)$ y B es compacta, $S_i(B)$ es compacto y por tanto $\tilde{S}(B)$ es compacto. Por inducción $\tilde{S}^k(B)$ también es compacto, luego los F_k son compactos todos ellos. Además, son no vacíos y de nuevo, por inducción, $F_{k+1} \subset F_k$, ya que $\tilde{S}(B) \subset B$. Por tanto

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

es compacto y no vacío. Ahora, veamos que

$$\tilde{S}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=2}^{\infty} F_k.$$

$\subset$) Sea $\tilde{a} \in \tilde{S}(F)$. Entonces existen $1 \leq j \leq m$ y $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ tales que $\tilde{a} = S_j(a)$. Se tiene $a \in F_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y como $F_{k+1} = \tilde{S}(F_k)$ entonces $\tilde{a} = S_j(a) \in F_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto es lo mismo que decir $\tilde{a} \in F_k$ para todo $k \geq 2$, de manera que $\tilde{a} \in \bigcap_{k=2}^{\infty} F_k$. Así

$$\tilde{S}(F) \subset \bigcap_{k=2}^{\infty} F_k.$$

$\supset$) Sea $a \in \bigcap_{k=2}^{\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{S}(F_k)$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $1 \leq j_k \leq m$ tal que $a \in S_{j_k}(F_k)$. Al haber una cantidad finita de posibles j_k e infinitos k, existe una subsucesión $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $j_{k_n} = i$ para algún $1 \leq i \leq m$ fijo. De esta manera $a \in S_i(F_{k_n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $F_{k_n} \subset F_l$ para todo $l \leq k_n$,

$$F_{k_n} = \bigcap_{l=1}^{k_n} F_l \ .$$

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\ a \in S_i\left(\bigcap_{l=1}^{k_n} F_l\right)$, luego

$$a \in S_i\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \subset \tilde{S}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \ .$$

Finalmente $\tilde{S}(F) = \bigcap_{k=2}^{\infty} F_k = F$, de manera que queda demostrada la existencia.

Para la unicidad basta ver que si G también cumple $G = \tilde{S}(G)$, entonces

$$d_H(F, G) = d_H\left(\tilde{S}(F), \tilde{S}(G)\right) \leq r d_H(F, G)$$

y como $r < 1$ se tiene $d_H(F, G) = 0$ y por tanto $F = G$. $\square$

Ahora bien, si tuviésemos $d(S_i(F), S_j(F)) > 0$ para todo $i, j = 1, ..., m$ entonces

$$m_\alpha(F) = \sum_{i=1}^{m} m_\alpha\left(S_i(F)\right),$$

y como S_i dilata con factor r, se tiene que $m_\alpha\left(S_i(F)\right) = r^\alpha m_\alpha(F)$, y utilizando la igualdad anterior,

$$m_\alpha(F) = r^\alpha m m_\alpha(F).$$

Si además tuviéramos $m_\alpha(F) < \infty$, obtendríamos

$$\alpha = \frac{\log m}{\log 1/r}.$$

Con esta idea vamos a dar una condición para las semejanzas bajo la cual vamos a poder calcular la dimensión de Hausdorff del conjunto autosemejante al que dan lugar.

Definición 1.27. *Las semejanzas $S_1, ..., S_m$ son separadas si existe un abierto A para el cual*

$$A \supset S_1(A) \cup ... \cup S_m(A)$$

y los conjuntos $S_j(A)$ son disjuntos (dos a dos).

Finalmente vamos a ver el teorema que nos permite calcular la dimensión de Hausdorff de los conjuntos autosemejantes por semejanzas separadas. Para ello, utilizaremos un lema que aparece tras la demostración del teorema.

Teorema *(Dimensión de conjuntos autosemejantes). Sean $S_1, ..., S_m$ semejanzas separadas de razón $0 < r < 1$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces el conjunto F dado por $F = \tilde{S}(F)$ tiene dimensión de Hausdorff $\alpha = \frac{\log m}{\log 1/r}$.*

Demostración. La prueba del teorema sigue los mismos argumentos dados en la demostración del teorema sobre la dimensión del triángulo de Sierpinski (apéndice B) pero generalizándolos.

Para la desigualdad $m_\alpha(F) < \infty$ es fácil observar que $\tilde{S}^k(B)$ cubre F y es unión de m^k conjuntos de diámetro menor o igual que cr^k (donde $c = \operatorname{diam} B$), ya que cada uno es imagen de la composición de k semejanzas $S_{n_1} \circ ... \circ S_{n_k}(B)$ (recordar el lema 1.22 y la demostración del teorema 1.26). Por tanto, dado $\delta > 0$ elegimos k lo suficientemente grande como para que $cr^k < \delta$, y se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^\delta_\alpha(F) &\leq \sum_{1\leq n_1\leq m} ... \sum_{1\leq n_k\leq m} (\operatorname{diam} S_{n_1} \circ ... \circ S_{n_k}(B))^\alpha \leq \\ &\leq c' r^{\alpha k} m^k = c' < \infty.\end{aligned}$$

La otra desigualdad requiere algo más de trabajo. Fijado un punto $x \in F$, se definen los vértices del paso k como los m^k puntos de F que vienen dados por $S_{n_1} \circ ... \circ S_{n_k}(x)$ con $1 \leq n_i \leq m$, $i = 1, ..., k$. Cada uno de ellos se puede denotar mediante la etiqueta

$(n_1, ..., n_k)$. No es necesario que sean todos distintos, de hecho tal y como los hemos definido pueden coincidir entre ellos.

Se definen los abiertos del paso k como los m^k conjuntos de la forma $S_{n_1} \circ ... \circ S_{n_k}(A)$ con $1 \leq n_i \leq m$, $i = 1, ..., k$ y donde A es el abierto de la definición 1.27. También los denotaremos con etiquetas de la forma $(n_1, ..., n_k)$, y como los abiertos del primer paso son disjuntos gracias a la condición de separación, los del paso k también lo son. Por último, vamos a denotar al vértice v por su etiqueta, y al abierto con la misma etiqueta lo denotaremos $A(v)$, ya que la correspondencia entre etiquetas es biyectiva.

Basta demostrar que si $\{B_j\}_{j=1}^N$ es un cubrimiento de F por bolas de diámetro menor que δ (que podemos tomarlo por ser F compacto), entonces

$$\sum_{j=1}^{N} (\operatorname{diam} B_j)^\alpha \geq c > 0,$$

ya que de cualquier recubrimiento de diámetro menor que $\delta/2$ podemos extraer uno por bolas de diámetro menor que δ. Vamos a elegir k tal que

$$r^k \leq \min_{1 \leq j \leq N} \operatorname{diam} B_j \leq r^{k-1},$$

y denotamos N_l al número de bolas del cubrimiento que cumplen

$$r^l \leq \operatorname{diam} B_j \leq r^{l-1}.$$

Utilizando el lema 1.28, se tiene que el número total de vértices del paso k que se pueden cubrir por $\{B_j\}_{j=1}^N$ tiene que ser menor o igual que $c \sum_l N_l m^{k-l}$, y como $\{B_j\}_{j=1}^N$ cubre todo F, los m^k vértices del paso k tienen que estar cubiertos, luego

$$m^k \leq c \sum_l N_l m^{k-l}$$

y por tanto $\sum_l N_l m^{k-l} \geq c'$ para alguna constante $c' > 0$. Ahora, como $mr^\alpha = 1$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{N} (\operatorname{diam} B_j)^\alpha \geq \sum_l N_l r^{l\alpha} \geq c' > 0.$$

□

Lema 1.28. *Sean $S_1, ..., S_m$ semejanzas separadas de razón $0 < r < 1$ en $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ y $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^N$ un cubrimiento de $F = \tilde{S}(F)$ por bolas de diámetro menor que δ. Si $B \in \mathcal{B}$ satisface*

$$r^l \leq \operatorname{diam} B \leq r^{l-1}$$

para algún $l \leq k$, entonces B contiene como mucho cm^{k-l} vértices del paso k.

Demostración. Sea v es un vértice del paso k tal que $v \in B$, y $A^k(v)$ su abierto correspondiente del paso k. Entonces, al estar v a una distancia fija de A y ser este de diámetro finito, se tiene

1. $d(v, A^k(v)) \leq cr^k$
2. $c'r^k \leq \text{diam } A^k(v) \leq cr^k$

donde c' y c son constantes. En particular estas dos propiedades garantizan que $A^k(v), A^l(v) \subset B^*$ para alguna dilatación B^* de B (independiente de k) cuyo radio es como mucho Cr^l, donde C es una constante que depende únicamente de c. Por tanto para cada $v \in B$, si $A^l(v)$ es su abierto del paso l, $A^l(v) \subset B^*$. Además $m(B^*) \leq Dr^{nl}$, donde D es una constante independiente de r, k, l y si $m(A) = V$, entonces $m\left(A^l(v)\right) = Vr^{nl}$. Si $\{A_j^l\}_{j=1}^{m^l}$ son los abiertos del paso l, llamando $H = \left\{j : \ A_j^l \subset B^*\right\}$,

$$Dr^{nl} \geq m(B^*) \geq m\left(\bigcup_{j\in H} A_j^l\right) \geq \sum_{j\in H} m(A_j^l) = \sum_{j\in H} Vr^{nl} = \text{Card}(H)Vr^{nl},$$

luego $\text{Card}(H) \leq D/V$ y B^* contiene como mucho D/V abiertos del paso l. Por tanto, a lo sumo hay $(D/V)m^{k-l}$ vértices del paso k en B. □

CAPÍTULO 2
Lema de Frostman e integrales de energía

En esta parte del trabajo vamos a ver cómo podemos relacionar la dimensión de Hausdorff de un conjunto con una propiedad de densidad de las medidas. También veremos cómo esto enlaza con la $\alpha-$energía de un conjunto y bajo qué condiciones podemos afirmar que α es mayor o menor que su dimensión de Hausdorff.

Antes de comenzar, introducimos algo de notación que vamos a utilizar a lo largo de los capítulos siguientes. Denotaremos por $C(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas. Al subconjunto de las que tienen soporte compacto lo denotaremos por $C_0(\mathbb{R}^n)$, y al conjunto de aquellas que sean suaves lo denotaremos por $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. El conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ lo formarán por tanto las funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ suaves y de soporte compacto. Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a la clase de Schwartz en $\mathbb{R}^n$. También, dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ de Borel, denotaremos por $\mathcal{M}(A)$ al conjunto de medidas de Borel μ con soporte compacto sop $(\mu) \subset A$ y que cumplen $0 < \mu(A) < \infty$. Por último, pasaremos a denotar $||\cdot||$ en $\mathbb{R}^n$ por $|\cdot|$.

2.1. Convergencia débil

El primer resultado importante de este capítulo que veremos es el Lema de Frostman, que nos facilitará el problema de encontrar una cota para la dimensión de Hausdorff de un conjunto. Para demostrarlo vamos a necesitar algunos conocimientos sobre convergencia débil de sucesiones de medidas.

Definición 2.1 *(Convergencia débil). Una sucesión $(\mu_j)_{j=1}^\infty$ de medidas de Borel en $\mathbb{R}^n$ converge débilmente a una medida de Borel μ si para toda $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ se tiene*

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\, \mu_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int \varphi \, \mathrm{d}\, \mu.$$

Teorema 2.2. *Toda sucesión $(\mu_j)_{j=1}^\infty$ de medidas de Borel en $\mathbb{R}^n$ para las cuales $\sup_j \mu_j(\mathbb{R}^n) < \infty$ tiene una subsucesión que converge débilmente.*

Este resultado es el Teorema 2.4, p. 16 de [9].

Definición 2.3. *Diremos que la familia* $\{\psi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ *de funciones* $\psi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuas y no negativas es una aproximación de la identidad si* $\operatorname{sop}(\psi_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$ *y* $\int \psi_\varepsilon = 1$ *para todo* $\varepsilon > 0$.

Habitualmente tomaremos una función $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y obtendremos una aproximación de la identidad $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiendo $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$. Esta es la definición 2.5, p. 16 de [9].

Definición 2.4. *Dadas* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, μ *y* ν *medidas de Borel, definimos la convolución de* f *y* μ *por*

$$f * \mu(x) = \int f(x-y)\,\mathrm{d}\,\mu(y),$$

siempre y cuando exista la integral, y la convolución de μ *y* ν *viene dada por*

$$\int \varphi\,\mathrm{d}(\mu * \nu) = \int\int \varphi(x+y)\,\mathrm{d}\,\mu(x)\,\mathrm{d}\,\mu(y) \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n) \text{ no negativa.}$$

Teorema 2.5. *Sea* $\{\psi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ *una aproximación de la identidad y* μ *una medida de Borel en* $\mathbb{R}^n$ *localmente finita. Entonces* $\psi_\varepsilon * \mu$ *converge débilmente a* μ *cuando* $\varepsilon \to 0$.

Este resultado es el Teorema 2.6, p. 17 de [9].

2.2. El Lema de Frostman

Lema 2.6 *(Lema de Frostman). Sean* $0 \le \alpha \le n$ *y* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto de Borel. Entonces* $m_\alpha(A) > 0$ *si y solo si existe* $\mu \in \mathcal{M}(A)$ *tal que*

$$\mu\left(B(x,r)\right) \le r^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0. \tag{2.1}$$

En particular,

$$\dim A = \sup\left\{\alpha : \ \exists \mu \in \mathcal{M}(A) \text{ que satisface } (2.1)\right\}.$$

Para demostrarlo, vamos a ver un resultado previo que se desprende del Lema 1, p. 1 de [1] junto con el Teorema 3, p. 11 de [1].

Lema 2.7. *Todo conjunto de Borel* $E \subset \mathbb{R}^n$ *con* $m_\alpha(E) > 0$ *contiene un subconjunto cerrado* $F \subset E$ *tal que* $0 < m_\alpha(F) < \infty$.

Demostración (Lema de Frostman). Para probar la primera implicación, supongamos que $\mu \in \mathcal{M}(A)$ satisface (2.1). De cada cubrimiento de A por conjuntos de diámetro menor o igual que δ podemos conseguir otro cubrimiento por bolas de diámetro menor

o igual que 2δ, ya que cada conjunto del cubrimiento cabe en una bola del doble de su diámetro. Sea pues $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento de A por bolas. Entonces

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^\alpha \geq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j) \geq \mu(A) > 0$$

y por tanto $m_\alpha(A) > 0$.

Ahora probaremos la otra implicación. Sea A un conjunto de Borel en $\mathbb{R}^n$ con $0 < m_\alpha(A)$. El lema 2.7 garantiza que existe un conjunto cerrado $F \subset A$ con $0 < m_\alpha < \infty$. Podemos escribir $F = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F \cap \overline{B(0,j)}$. En particular $F \cap \overline{B(0,j)}$ es compacto para cada $j \in \mathbb{N}$. De aquí podemos extraer un conjunto compacto $K \subset F$ y tal que $0 < m_\alpha(K) < \infty$. Por ser $m_\alpha(K) > 0$, existe $c > 0$ para el cual, para todo cubrimiento $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de K, se tiene $\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(E_j)^\alpha \geq c$.

Ahora vamos a construir la medida μ como límite débil de medidas μ_k. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos una partición de $\mathbb{R}^n$ en cubos de longitud 2^{-k}. Primero consideramos una medida $\mu_{k,1}$ que, en cada cubo Q, es un múltiplo adecuado de la medida de Lebesgue sobre Q, de manera que $\mu_{k,1}(Q) = \operatorname{diam}(Q)^\alpha$ si $Q \cap K \neq \emptyset$ y $\mu_{k,1} \equiv 0$ si $Q \cap K = \emptyset$. Para bolas B de diámetro a lo sumo 2^{-k} se cumple la condición (2.1). Para permitir que se cumpla en bolas de mayor diámetro, modificamos $\mu_{k,1}$ para obtener $\mu_{k,2}$. Para cada Q de lado $\ell(Q) = 2^{-k+1}$, $\mu_{k,2} = \mu_{k,1}$ siempre que $\mu_{k,1}(Q) \leq \operatorname{diam}(Q)^\alpha$, y si no, modificamos $\mu_{k,1}$ multiplicando por la constante adecuada para que $\mu_{k,2}(Q) = \operatorname{diam}(Q)^\alpha$. Para $\mu_{k,2}$ se cumple (2.1) para bolas de diámetro como mucho 2^{-k+1}. Continuando este proceso llegamos a un único cubo Q_0 que contiene a K (podemos elegir la partición al principio de manera que ocurra esto, al ser K compacto y por tanto acotado). Sobre tal Q_0 queda definida la medida μ_k. Además, $\mu_k(Q) \leq \operatorname{diam}(Q)^\alpha$ para todo cubo Q de lado como mínimo 2^{-k}, ya que en el proceso de construir μ_k nunca hemos aumentado la medida. Cada $x \in K$ está contenido en un $Q \subset Q_0$ tal que $\mu_k(Q) = \operatorname{diam}(Q)^\alpha$. De aquí podemos elegir un cubrimiento de K por tales cubos, maximal (y por tanto por cubos disjuntos) y tal que

$$\mu_k(\mathbb{R}^n) = \sum_j \mu_k(Q_j) = \sum_j \operatorname{diam}(Q_j)^\alpha \geq c > 0.$$

Ahora el teorema 2.5 nos permite tomar una subsucesión de $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a μ. Para esta medida μ, se tiene $\operatorname{sop}\mu \subset K$ (luego $\operatorname{sop}\mu$ es compacto) y μ cumple (2.1). Falta comprobar que μ no es la medida nula (podría serlo, la convergencia débil no asegura que no lo sea). Sin embargo, $\mu_k(\mathbb{R}^n) \geq c$, luego $\mu(\mathbb{R}^n) \geq c > 0$. Finalmente, $\mu \in \mathcal{M}(A)$ puesto que $0 < c \leq \mu(K) \leq \mu(A) \leq \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. □

Una consecuencia de este resultado es que podemos acotar inferiormente la dimensión del producto de dos conjuntos por la suma de las dimensiones de ambos, como establece el siguiente teorema.

Corolario 2.8. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos de Borel no vacíos. Entonces*

$$\dim A + \dim B \leq \dim A \times B.$$

Demostración. Si $0 \leq \alpha < \dim A$, $0 \leq \beta < \dim B$ y $\mu \in \mathcal{M}(A)$, $\nu \in \mathcal{M}(B)$ son medidas que cumplen la condición (2.1) para α y β (respectivamente), entonces la medida producto $\mu \times \nu \in \mathcal{M}(A \times B)$ tiene $(\mu \times \nu)(B((x,y),r)) \leq r^{\alpha+\beta}$, luego también cumple la condición (2.1) y por tanto la dimensión de $A \times B$ es mayor o igual que $\alpha + \beta$ para todos los α, β como los hemos elegido. □

2.3. Integrales de energía

Definición 2.9. *Dado $\alpha > 0$ y μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$, se define la α–energía de μ por*

$$I_\alpha(\mu) = \int \int |x-y|^{-\alpha} \, \mathrm{d}\,\mu(x) \, \mathrm{d}\,\mu(y).$$

Lo que vamos a estudiar en esta parte del trabajo es cómo se relacionan estas energías con la dimensión de Hausdorff de un conjunto de Borel. Vamos a empezar enunciando un lema que necesitaremos para probar el teorema principal de esta sección.

Lema 2.10. *Sea $(\mathbb{R}^n, \mu)$ un espacio de medida σ–finito donde μ es una medida de Borel, y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ no negativa. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}\,\mu = \int_0^\infty \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \geq t\}\right) \mathrm{d}\,t.$$

Demostración. Calculamos con la ayuda del Teorema de Fubini–Tonelli,

$$\int_0^\infty \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \geq t\}\right) \mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \geq t\}} \mathrm{d}\,\mu(x) \, \mathrm{d}\,t =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{f(x)} \mathrm{d}\,t \, \mathrm{d}\,\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \mathrm{d}\,\mu(x).$$

□

Observemos ahora lo siguiente. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y tomando $f(y) = |x-y|^\alpha$, el lema garantiza que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-\alpha} \, \mathrm{d}\,\mu(y) = \int_0^\infty \mu\left(y \in \mathbb{R}^n : \ |x-y|^{-\alpha} \geq t\right) \mathrm{d}\,t =$$
$$= \int_0^\infty \mu\left(B(x, t^{-1/\alpha})\right) \mathrm{d}\,t \underset{r = t^{-1/\alpha}}{=} \alpha \int_0^\infty \frac{\mu\left(B(x,r)\right)}{r^{\alpha+1}} \, \mathrm{d}\,r.$$

Es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-\alpha} \, \mathrm{d}\,\mu(y) = \alpha \int_0^\infty \frac{\mu\left(B(x,r)\right)}{r^{\alpha+1}} \, \mathrm{d}\,r.$$

Con esto ya tenemos todo lo necesario para poder probar el siguiente teorema.

Teorema 2.11. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un boreliano, entonces*

$$\dim A = \sup\left\{\alpha > 0 : \ \exists \mu \in \mathcal{M}(A) \ \textit{t.q.} \ I_\alpha(\mu) < \infty\right\}.$$

Demostración. Utilizando el Lema de Frostman, vemos que basta con probar

$$\begin{aligned}\sup\{\alpha>0:\ \exists\mu\in\mathcal{M}(A)\text{ t.q. }\mu(B(x,r))\le r^\alpha\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ r>0\}=\\ =\sup\{\alpha>0:\ \exists\mu\in\mathcal{M}(A)\text{ t.q. }I_\alpha(\mu)<\infty\}.\end{aligned}$$

Para probar la primera desigualdad, vemos que si existe una medida μ como la del conjunto de la izquierda, entonces, para $0<\beta<\alpha$,

$$\begin{aligned}I_\beta(\mu)&=\int\int|x-y|^{-\beta}\,\mathrm{d}\,\mu(x)\,\mathrm{d}\,\mu(y)=\beta\int\int_0^\infty\frac{\mu(B(x,r))}{r^{\beta+1}}\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\mu(x)=\\
&=\beta\int\left(\int_0^{\operatorname{diam}(\operatorname{sop}(\mu))}\frac{\mu(B(x,r))}{r^{\beta+1}}+\int_{\operatorname{diam}(\operatorname{sop}(\mu))}^\infty\frac{\mu(B(x,r))}{r^{\beta+1}}\,\mathrm{d}\,r\right)\mathrm{d}\,\mu(x)\le\\
&\le\beta\int\left(\frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{(\operatorname{diam}\operatorname{sop}(\mu))^{\beta+1}}+\int_0^{\operatorname{diam}(\operatorname{sop}(\mu))}\frac{\mu(B(x,r))}{r^{\beta+1}}\,\mathrm{d}\,r\right)\mathrm{d}\,\mu(x)\le\\
&\le k+\beta\int\int_0^{\operatorname{diam}(\operatorname{sop}(\mu))}\frac{\mu(B(x,r))}{r^{\beta+1}}\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\mu(x)\le\\
&\le k+\beta\int\int_0^{\operatorname{diam}(\operatorname{sop}(\mu))}\frac{r^\alpha}{r^{\beta+1}}\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\mu(x)\le\\
&\le k+\beta\mu(\mathbb{R}^n)\int_0^{\operatorname{diam}(\operatorname{sop}(\mu))}r^{\alpha-\beta-1}\,\mathrm{d}\,r<\infty\end{aligned}$$

donde k es una constante (finita). Así, para todo $0<\beta<\alpha$, $I_\beta(\mu)<\infty$. Ahora comprobamos la desigualdad contraria. Sea $A\subset\mathbb{R}^n$ de Borel, $\mu\in\mathcal{M}(A)$ y supongamos $I_\alpha(\mu)<\infty$. Tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{-\alpha}\,\mathrm{d}\,\mu(y)<\infty$$

para c.t. $x\in\mathbb{R}^n$. Así, para cierto $0<M<\infty$, el conjunto

$$E_M=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ \int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{-\alpha}\,\mathrm{d}\,\mu(y)<M\right\}$$

tiene medida μ positiva. Elegimos M para que $K=E_M\cap A$ tenga medida $0<\mu(K)<\infty$ (si no pudiéramos hacerlo entonces $I_\alpha(\mu)=\infty$). Sea ν la restricción de μ a K y $x\in K$.

$$\frac{\nu(B(x,r))}{r^\alpha}=\int_{B(x,r)}\frac{1}{r^\alpha}\,\mathrm{d}\,\nu(y)\le\int_{B(x,r)}\frac{1}{|x-y|^\alpha}\,\mathrm{d}\,\nu(y)<M$$

luego $\nu(B(x,r))<Mr^\alpha$. Ahora para $x\in\mathbb{R}^n$ en general, si $B(x,r)\cap K=\emptyset$ entonces $\mu(B(x,r))=0$, y si $B(x,r)\cap K\neq\emptyset$ entonces para $z\in B(x,r)\cap K$ se tiene $B(x,r)\subset B(z,2r)$ y por tanto

$$r^{-\alpha}\nu(B(x,r))\le 2^\alpha(2r)^{-\alpha}\nu(B(z,2r))<2^\alpha M,$$

dado que $z\in K$ y por lo que hemos visto justo antes. Así, para $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\nu(B(x,r))<2^\alpha Mr^\alpha,$$

y basta tomar un múltiplo adecuado de ν que satisface la condición de Frostman. □

CAPÍTULO 3

Medida de Hausdorff y transformada de Fourier

El objetivo de este capítulo será demostrar el siguiente teorema, que relaciona la medida de Hausdorff con la transformada de Fourier mediante las energías que hemos visto en el capítulo anterior. A lo largo del capítulo siguiente veremos cómo este resultado es de gran utilidad a la hora de atacar ciertos problemas geométricos, ya que relaciona la dimensión de Hausdorff con la transformada de Fourier, una herramienta muy útil del análisis.

Teorema 3.1. *Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ y $0 < \alpha < n$. Entonces*

$$I_\alpha(\mu) = \gamma(n,\alpha) \int |\widehat{\mu}(x)|^2 \, |x|^{\alpha-n} \, \mathrm{d}\, x$$

donde $\gamma(n,\alpha)$ es una constante que depende de n y α.

Para llegar a este resultado primero tenemos que hablar sobre la transformada de Fourier de medidas y distribuciones temperadas, sobre el núcleo de Riesz, y explorar algunas propiedades de la transformada de su distribución asociada.

3.1. Transformada de Fourier de medidas y distribuciones temperadas

Definición 3.2. *Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ una medida de Borel. Se define su transformada de Fourier como*

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi \cdot x} \, \mathrm{d}\, \mu(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Las propiedades que cumple la transformada de una medida son similares a aquellas que cumple la transformada de una función.

Definición 3.3. *Se llaman distribuciones temperadas a los funcionales lineales continuos $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$. Se define la transformada de Fourier de T como la distribución temperada $\widehat{T}$ que cumple $\widehat{T}(f) = T(\widehat{f})$.*

A algunas funciones g podemos asociarles un funcional, L_g, definiendo

$$L_g(\varphi) = \int \varphi(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En particular, si $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, o es suma de dos funciones, una en $L_p(\mathbb{R}^n)$ y otra en $L_r(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, r \leq \infty$, entonces L_g es una distribución temperada (se puede comprobar utilizando la desigualdad de Hölder). Un caso importante en el que nos vamos a centrar es cuando g es el núcleo de Riesz, una función particular que definiremos a continuación y de la cual estudiaremos algunos aspectos.

Nótese que para funciones $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ o $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la definición de $\widehat{L_f}$ coincide con la de $L_{\widehat{f}}$. De esta manera las distribuciones temperadas nos van a permitir trabajar la "transformada" de funciones sobre las cuales no podemos tomar la transformada de Fourier. La teoría de distribuciones es muy amplia, y para más detalle sobre lo que vamos a necesitar se puede consultar el capítulo 2, p. 119 de [7].

Por último, conviene recordar cómo definir la transformada de Fourier de funciones que están en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < 2$. Estas funciones f pueden descomponerse como suma de una función f_1 en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y otra función f_2 en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos $\widehat{f} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$. De este modo, $\widehat{L_f} = L_{\widehat{f}}$.

3.2. Núcleo de Riesz

Dado $0 < \alpha < n$, la función

$$\begin{array}{rccc} k_\alpha : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x|^{-\alpha} \end{array}$$

se conoce como el núcleo de Riesz. Lo primero que podemos observar es que k_α aparece en la expresión para la energía de una medida de Borel μ,

$$I_\alpha(\mu) = \int\int |x-y|^{-\alpha}\,\mathrm{d}\,\mu(x)\,\mathrm{d}\,\mu(y) = \int\int k_\alpha(x-y)\,\mathrm{d}\,\mu(x)\,\mathrm{d}\,\mu(y).$$

Además, L_{k_α} define una distribución temperada. Vamos a justificar que la transformada de esta distribución temperada es de la forma

$$\widehat{L_{k_\alpha}}(\varphi) = \gamma(n,\alpha)L_{k_{n-\alpha}}(\varphi),$$

con el objetivo de utilizarlo más adelante. Para ello, introduciremos la siguiente igualdad para funciones $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ radiales (esto es $f(x) = \psi(|x|)$ para alguna función $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$),

$$\widehat{f}(x) = c(n)\,|x|^{-(n-2)/2} \int_0^\infty \psi(s)J_{(n-2)/2}(2\pi\,|x|\,s)s^{n/2}\,\mathrm{d}\,s, \tag{3.1}$$

donde $c(n)$ es una constante finita que depende de n, y $J_{(n-2)/2}$ corresponde a la función de Bessel de orden $(n-2)/2$. La demostración de (3.1) se discute en el apéndice D. En particular esto garantiza que la transformada de Fourier de una función

radial es también radial. Más adelante vamos a necesitar (3.1) cuando hablemos sobre conjuntos de distancias.

De la fórmula de inversión para la transformada de Fourier de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se deduce directamente que $\widehat{f}(x) = \check{f}(-x)$, luego $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$, y si f es radial, entonces $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(x)$. Para distribuciones temperadas existe el siguiente resultado análogo.

Lema 3.4. *Sea g una función que cumple $g(x) = g(-x)$, localmente integrable, con distribución temperada asociada L_g, y cuya transformada de Fourier $\widehat{L_g}$ es una función localmente integrable. Entonces $\widehat{\widehat{L_g}} = L_g$.*

Demostración. Calculamos,

$$\widehat{\widehat{L_g}}(\varphi) = \widehat{L_g}(\widehat{\varphi}) = L_g(\widehat{\widehat{\varphi}}) = \int g(x)\widehat{\widehat{\varphi}}(x)\,\mathrm{d}\,x = \int g(x)\varphi(-x)\,\mathrm{d}\,x =$$
$$= \int g(-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}\,y = \int g(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}\,y = L_g(\varphi).$$

□

Teorema 3.5. *Si $0 < \alpha < n$, existe una constante positiva y finita $\gamma(n,\alpha)$ tal que $\widehat{L_{k_\alpha}} = \gamma(n,\alpha)L_{k_{n-\alpha}}$. Es decir,*

$$\int k_\alpha \widehat{\varphi} = \gamma(n,\alpha)\int k_{n-\alpha}\varphi \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Primero vamos con el caso $n/2 < \alpha < n$. La función $k_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$ está en $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$, ya que

$$\int_{B(0,1)} |k_\alpha(x)|\,\mathrm{d}\,x < \infty \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |k_\alpha(x)|^2\,\mathrm{d}\,x < \infty,$$

lo cual se comprueba fácilmente utilizando la fórmula de integración en coordenadas polares (D.1). Así, su transformada de Fourier se define como la suma de las transformadas de Fourier de estas dos funciones, y por lo tanto está en $L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$.

La función k_α es radial y es inmediato comprobar que cumple $k_\alpha(rx) = r^{-\alpha}k_\alpha(x)$ si $r > 0$. De (3.1) se deduce que $\widehat{k_s}$ también es radial. Definiendo $\delta_r(x) = rx$, y junto con el hecho de que $\widehat{f \circ \delta_r}(\xi) = r^{-n}\widehat{f}(\xi/r)$ (que es sencillo de comprobar), llegamos a que

$$r^{-n}\widehat{k_\alpha}(x) = \widehat{k_\alpha \circ \delta_r}(rx) = r^{-\alpha}\widehat{k_\alpha}(rx),$$

y por tanto $\widehat{k_\alpha}(rx) = r^{\alpha-n}\widehat{k_\alpha}(x)$. Así,

$$\widehat{k_\alpha}(x) = \widehat{k_\alpha}\left(|x|\,\frac{x}{|x|}\right) = |x|^{\alpha-n}\,\widehat{k_\alpha}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \gamma(n,\alpha)\,|x|^{\alpha-n} = \gamma(n,\alpha)k_{n-\alpha}(x),$$

donde $\gamma(n,\alpha)$ es el valor de k_α sobre la esfera unidad, que es una constante debido a que k_α es radial. Por tanto $\widehat{k_\alpha}(x) = \gamma(n,\alpha)k_{n-\alpha}(x)$, luego para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{L_{k_\alpha}}(\varphi) = L_{k_\alpha}(\widehat{\varphi}) = \int k_\alpha\widehat{\varphi} = \int \widehat{k_\alpha}\varphi =$$
$$= \gamma(n,\alpha)\int k_{n-\alpha}\varphi = \gamma(n,\alpha)L_{k_{n-\alpha}}(\varphi).$$

Ahora supongamos que $0 < \alpha < n/2$. Entonces $n/2 < n - \alpha < n$, y se tiene, por el anterior caso, $\widehat{k_{n-\alpha}}(x) = \gamma(n, n-\alpha)k_\alpha(x)$. Así, utilizando el lema 3.4, llegamos a que

$$\begin{aligned}\widehat{L_{k_\alpha}}(\varphi) = L_{k_\alpha}(\widehat{\varphi}) = \int k_\alpha \widehat{\varphi} = \gamma(n, n-\alpha)^{-1} \int \widehat{k_{n-\alpha}}\widehat{\varphi} = \\ = \gamma(n, n-\alpha)^{-1} \int k_{n-\alpha}\widehat{\widehat{\varphi}} = \gamma(n, n-\alpha)^{-1} L_{k_{n-\alpha}}(\widehat{\widehat{\varphi}}) = \\ = \gamma(n, n-\alpha)^{-1} \widehat{\widehat{L_{k-\alpha}}}(\varphi) = \gamma(n, n-\alpha)^{-1} L_{k_{n-\alpha}}(\varphi).\end{aligned}$$

Finalmente falta por probar el caso $\alpha = n/2$. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\widehat{L_{k_{n/2}}}(\varphi) = \int k_{n/2}\widehat{\varphi} = \int \lim_{\alpha \to n/2} k_\alpha \widehat{\varphi} = \lim_{\alpha \to n/2} \int k_\alpha \widehat{\varphi} = \lim_{\alpha \to n/2} \gamma(n, n-\alpha) \int k_{n-\alpha}\varphi.$$

El paso del límite fuera de la integral está justificado por el Teorema de la Convergencia Dominada (cuando $|x| > 1$ basta tomar $|\widehat{\varphi}|$ como cota, y cuando $|x| < 1$, podemos estimar $|x|^{-n/2}$ por $|x|^{-(\delta + n/2)}$, $0 < \delta < n/2$). Ahora vamos a probar que $\lim_{\alpha \to n/2} \gamma(n, \alpha) = 1$. Para $\alpha \neq n/2$ y tomando $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ (que cumple $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$), se tiene

$$\int k_\alpha \varphi = \int k_\alpha \widehat{\varphi} = \gamma(n, \alpha) \int k_{n-\alpha}\varphi,$$

y sustituyendo,

$$\int |x|^{-\alpha} e^{-\pi|x|^2} \,\mathrm{d}\, x = \gamma(n, \alpha) \int |x|^{\alpha - n} e^{-\pi|x|^2} \,\mathrm{d}\, x.$$

Tomando límites cuando $\alpha \to n/2$ se obtiene que $\lim_{\alpha \to n/2} \gamma(n, \alpha) = 1$. Consecuentemente se consigue

$$\widehat{L_{k_{n/2}}}(\varphi) = \lim_{\alpha \to n/2} \gamma(n, n-\alpha) \int k_{n-\alpha}\varphi = \int k_{n/2}\varphi$$

y con esto queda demostrado el teorema. □

3.3. Transformada de Fourier y energías

Para terminar este capítulo, vamos a demostrar el teorema 3.1.

Demostración (Teorema 3.1). Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con valores reales. Denotamos $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Como φ se identifica con una medida que es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, vamos a calcular su energía (como medida) $I_\alpha(\varphi)$ para luego demostrar el teorema para medidas como las de las hipótesis aproximándolas por funciones que están en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Mediante el cambio de variable $z = y - x$, se tiene

$$\begin{aligned}I_\alpha(\varphi) = \int\int k_\alpha(y-x)\varphi(x)\varphi(y) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = \int\int k_\alpha(z)\varphi(y-z)\varphi(y) \,\mathrm{d}\, z \,\mathrm{d}\, y = \\ = \int k_\alpha(z) \int \varphi(y-z)\varphi(y) \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z = \int k_\alpha(\tilde{\varphi} * \varphi) = \int k_\alpha \widehat{\varphi}\widehat{\overline{\varphi}} = \widehat{L_{k_\alpha}}\left(\widehat{\varphi}\widehat{\overline{\varphi}}\right)\end{aligned}$$

ya que $\tilde{\varphi} * \varphi$ es la transformada de Fourier de $\widehat{\varphi}\overline{\widehat{\varphi}}$. Como además esto último es igual a $|\widehat{\varphi}|^2$, se tiene, por el teorema 3.5,

$$I_\alpha(\varphi) = \gamma(n,\alpha) \int |x|^{\alpha-n} \, |\widehat{\varphi}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x.$$

Ahora consideramos $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$ una aproximación de la identidad con $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y tal que $\int \psi = 1$. Como μ es una medida de Borel con soporte compacto, las funciones $\mu_\varepsilon = \psi_\varepsilon * \mu$ son suaves y de soporte compacto, luego $\mu_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De esta manera,

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mu_\varepsilon) &= \gamma(n,\alpha) \int |x|^{\alpha-n} \, |\widehat{\mu_\varepsilon}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x = \gamma(n,\alpha) \int |x|^{\alpha-n} \left|\widehat{\psi_\varepsilon * \mu}(x)\right|^2 \mathrm{d}\, x = \\ &= \gamma(n,\alpha) \int |x|^{\alpha-n} \left|\widehat{\psi_\varepsilon}(x)\right|^2 |\widehat{\mu}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x = \gamma(n,\alpha) \int |x|^{\alpha-n} \left|\widehat{\psi}(\varepsilon x)\right|^2 |\widehat{\mu}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x. \end{aligned}$$

Ahora dividimos el cálculo en dos partes. Si suponemos $\int |x|^{\alpha-n} \, |\widehat{\mu}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x < \infty$, dado que $\left|\widehat{\psi}(\varepsilon x)\right| \to 1$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $\left|\widehat{\psi}(\varepsilon x)\right| \leq ||\psi||_{L^1}$, por el Teorema de Convergencia Dominada se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\alpha(\mu_\varepsilon) = \gamma(n,\alpha) \int |x|^{\alpha-n} \, |\widehat{\mu}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x.$$

Cuando $\int |x|^{\alpha-n} \, |\widehat{\mu}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x = \infty$, por continuidad de $\widehat{\psi}$ y como $\widehat{\psi}(0) = 1$, existe una bola de radio R centrada en el origen en la cual $\left|\widehat{\psi}(x)\right| > 1/2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mu_\varepsilon) &= \gamma(n,\alpha) \int |x|^{\alpha-n} \left|\widehat{\psi}(\varepsilon x)\right|^2 |\widehat{\mu}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x \geq \\ &\geq \frac{\gamma(n,\alpha)}{4} \int_{\{|x| \leq R/\varepsilon\}} |x|^{\alpha-n} \, |\widehat{\mu}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{\gamma(n,\alpha)}{4} \int |x|^{\alpha-n} \, |\widehat{\mu}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x = \infty, \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\alpha(\mu_\varepsilon) = \gamma(n,\alpha) \int |x|^{\alpha-n} \, |\widehat{\mu}(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x. \tag{3.2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mu_\varepsilon) &= \int\int k_\alpha(y-x)\mu_\varepsilon(x)\mu_\varepsilon(y) \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \\ &= \int\int k_\alpha(y-x) \int \psi_\varepsilon(x-z) \, \mathrm{d}\, \mu(z) \int \psi_\varepsilon(y-w) \, \mathrm{d}\, \mu(w) \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \\ &= \int\int \left(\int\int k_\alpha(y-x)\psi_\varepsilon(x-z)\psi_\varepsilon(y-w) \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, \mu(z) \, \mathrm{d}\, \mu(w). \end{aligned}$$

Queremos probar ahora que esto tiende a $I_\alpha(\mu)$ conforme $\varepsilon \to 0$. Fijándonos en la doble integral interior y haciendo el cambio de variables $u = (x-z)/\varepsilon$ y $v = (y-w)/\varepsilon$, tenemos

$$\begin{aligned} &\int\int k_\alpha(y-x)\psi_\varepsilon(x-z)\psi_\varepsilon(y-w) \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \\ &\qquad = \int\int |\varepsilon(u-v) + z - w|^{-\alpha} \, \psi(u)\psi(v) \, \mathrm{d}\, u \, \mathrm{d}\, v. \end{aligned}$$

Como ψ tiene soporte compacto, el espacio sobre el que integramos es de medida finita, y $|\varepsilon(u-v)+z-w|^{-\alpha}$ tiende a $|z-w|^{-\alpha}$ cuando $\varepsilon \to 0$ si $z \neq w$. También $\int \psi = 1$, luego la integral interior tiende a $|z-w|^{-\alpha}$ por el Teorema de Convergencia Dominada.

Ahora supongamos que $I_\alpha(\mu) < \infty$. Falta ver cómo intercambiar el límite y las integrales exteriores. Para ello, basta comprobar que

$$\int\int k_\alpha(y-x)\psi_\varepsilon(x-z)\psi_\varepsilon(y-w)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \leq C\,|z-w|^{-\alpha}$$

para alguna constante positiva (y finita) C. Esta estimación queda en el apéndice D. Ahora aplicamos el Teorema de Convergencia Dominada (aquí es cuando usamos $I_\alpha(\mu) < \infty$). De ahí obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\alpha(\mu_\varepsilon) = \int\int |z-w|^{-\alpha}\,\mathrm{d}\,\mu(z)\,\mathrm{d}\,\mu(w) = I_\alpha(\mu). \tag{3.3}$$

De (3.2) y (3.3) conseguimos

$$I_\alpha(\mu) = \gamma(n,\alpha)\int |x|^{\alpha-n}\,|\widehat{\mu}(x)|^2\,\mathrm{d}\,x.$$

Cuando $I_\alpha(\mu) = \infty$, aplicando el lema de Fatou,

$$\begin{aligned}\infty = I_\alpha(\mu) &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} I_\alpha(\mu_\varepsilon) = \\ &= \liminf_{\varepsilon\to 0}\int\int\left(\int\int k_\alpha(y-x)\psi_\varepsilon(x-u)\psi_\varepsilon(y-w)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,\mu(u)\,\mathrm{d}\,\mu(w) = \\ &= \gamma(n,\alpha)\liminf_{\varepsilon\to 0}\int |x|^{\alpha-n}\left|\widehat{\psi}(\varepsilon x)\right|^2|\widehat{\mu}(x)|^2\,\mathrm{d}\,x = \gamma(n,\alpha)\int |x|^{\alpha-n}\,|\widehat{\mu}(x)|^2\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 4
Conjuntos de distancias

A lo largo de esta última parte del trabajo veremos una aplicación de la transformada de Fourier a un problema sobre la dimensión de Hausdorff, el de estimar el "tamaño" del conjunto de distancias de un conjunto para el que se conocen ciertas cotas sobre su dimensión.

Definición 4.1. *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos su conjunto de distancias por*

$$D(A) = \{|x - y| : \ x, y \in A\}.$$

Antes de continuar, vamos a presentar la conjetura de Falconer sobre conjuntos de distancias.

Conjetura *(Falconer, conjuntos de distancias). Sean $n \geq 2$ y $A \subset \mathbb{R}^n$, con $\dim A > n/2$ un conjunto de Borel. Entonces $m(D(A)) > 0$.*

El teorema sobre conjuntos de distancias que nos interesa está íntimamente relacionado con esta conjetura, ya que (con la notación de la conjetura) garantiza que si la dimensión de A es mayor que $(n+1)/2$ (en lugar de $n/2$), entonces el interior del conjunto $D(A)$ es no vacío, de manera que su medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es mayor que cero. Para demostrar este teorema, es conveniente definir una medida auxiliar asociada a cada medida μ.

Definición 4.2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de Borel y sea $\mu \in \mathcal{M}(A)$ una medida de Borel. La medida $\delta(\mu) \in \mathcal{M}(D(A))$ se define como aquella dada por*

$$\delta(\mu)(B) = \int \mu(\{y : \ |x - y| \in B\}) \, \mathrm{d}\, \mu(x)$$

para $B \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Borel. Equivalentemente, para cada función φ continua en $\mathbb{R}$,

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\, \delta(\mu) = \int \int \varphi(|x - y|) \, \mathrm{d}\, \mu(x) \, \mathrm{d}\, \mu(y).$$

Lo que sigue a continuación son varias observaciones que ponen de relieve algunas propiedades de $\delta(\mu)$. Más adelante probaremos un par de lemas con el objetivo de

utilizar todo lo visto en el capítulo para demostrar el teorema que nos interesa sobre conjuntos de distancias.

Observación. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de Borel y $\mu \in \mathcal{M}(A)$ es una medida de Borel, entonces

$$\operatorname{sop} \delta(\mu) \subset D(\operatorname{sop} \mu). \tag{4.1}$$

Vamos a demostrarlo. Sea $r \in \operatorname{sop}\,(\delta(\mu))$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$,

$$0 < \delta(\mu)(\overline{B_\varepsilon(r)}) = \int\int 1_{\{|x-y| \in \overline{B_\varepsilon(r)}\}} \,\mathrm{d}\,\mu(x)\,\mathrm{d}\,\mu(y). \tag{4.2}$$

Sea $F_\varepsilon = \left\{(x,y) \in \operatorname{sop}(\mu) \times \operatorname{sop}(\mu) : |x-y| \in \overline{B_\varepsilon(r)}\right\}$. Vamos a comprobar que los conjuntos $\{F_{1/n}\}_{n=1}^\infty$ forman una familia de compactos encajados no vacíos.

Por (4.2), $F_\varepsilon \neq \emptyset$. Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ entonces $F_{\varepsilon_1} \subset F_{\varepsilon_2}$. Además, como

$$F_\varepsilon = (\operatorname{sop}(\mu) \times \operatorname{sop}(\mu)) \cap d^{-1}\left([r-\varepsilon, r+\varepsilon]\right),$$

$\operatorname{sop}(\mu)$ es compacto y d (es la distancia dada por la norma en $\mathbb{R}^n$) es continua, F_ε es cerrado. Como $F_\varepsilon \subset \operatorname{sop}(\mu) \times \operatorname{sop}(\mu)$, entonces F_ε es compacto. Finalmente, sea $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{1/n}$. Entonces $F \neq \emptyset$, y si $(x,y) \in F$, se cumple $|x-y| = r$, luego $r \in D(\operatorname{sop}(\mu))$.

Observación. Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, que se identifica con una medida (que llamamos f). Entonces $\delta(f)$ también se identifica con una función. Utilizando el Teorema de Fubini e integrando en coordenadas polares,

$$\begin{aligned}
\int \varphi \,\mathrm{d}\,\delta(f) &= \int\int \varphi(|x-y|) f(x) f(y) \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \underset{u=y-x}{=} \\
&= \int f(y) \int \varphi(|u|) f(y-u) \,\mathrm{d}\,u \,\mathrm{d}\,y = \\
&= \int f(y) \int_0^\infty \varphi(r) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x-y) \,\mathrm{d}\,\sigma_r^{n-1}(x) \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,y = \\
&= \int_0^\infty \varphi(r) \int (\sigma_r^{n-1} * f)(y) f(y) \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,r.
\end{aligned}$$

Por tanto $\delta(f)$ es una función que viene dada por

$$\delta(f)(r) = \int (\sigma_r^{n-1} * f)(y) f(y) \,\mathrm{d}\,y. \tag{4.3}$$

Otro hecho sencillo de comprobar a partir de la definición de $\delta(\mu)$ es que si $\mu_i \longrightarrow \mu$ débilmente, entonces $\delta(\mu_i) \longrightarrow \delta(\mu)$ débilmente.

Observación. Recordando que σ_r^{n-1} es la medida sobre la esfera de radio r en $\mathbb{R}^n$ y haciendo unos pocos cálculos, llegamos a que

$$\widehat{\sigma_r^{n-1}}(x) = r^{n-1} \widehat{\sigma^{n-1}}(rx), \tag{4.4}$$

y $\widehat{\sigma_r^{n-1}}(x)$ es una función continua (basta comprobar que $\widehat{\sigma^{n-1}}$ lo es, y esto se cumple por el Teorema de Convergencia Dominada). Además, podemos hacer la siguiente estimación,

$$\left|\widehat{\sigma_r^{n-1}}(x)\right| \leq C r^{\frac{1-n}{2}} |x|^{\frac{1-n}{2}}, \tag{4.5}$$

para cierta constante positiva C. Veamos cómo demostrarla.

Comenzamos comprobando que σ^{n-1} es el límite débil de medidas $\delta^{-1}m$ restringidas a $B_\delta = B(0,1+\delta) \setminus B(0,1)$. Sea $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} \int_{B_\delta} \delta^{-1}\varphi(y)\,\mathrm{d}\,y &= \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \delta^{-1} \int_1^{1+\delta} r^{n-1}\varphi(rx)\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(x) = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \lim_{\delta\to 0} \delta^{-1} \int_1^{1+\delta} r^{n-1}\varphi(rx)\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(x) = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(x).\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma^{n-1}}(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i x\cdot y}\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(y) = \lim_{\delta\to 0} \int_{B_\delta} e^{-2\pi i x\cdot y}\delta^{-1}\,\mathrm{d}\,y = \\ &= \lim_{\delta\to 0} \delta^{-1} \int 1_{B_\delta}(y) e^{-2\pi i x\cdot y}\,\mathrm{d}\,y = \lim_{\delta\to 0} \frac{\widehat{1_{B_\delta}(x)}}{\delta}.\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la identidad (3.1) y los siguientes resultados sobre las funciones de Bessel (ver [7], p. 573 y [9], p. 34),

$$|J_m(t)| \leq c(m) t^{-1/2}, \quad t > 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(t^m J_m(t)\right) = t^m J_{m-1}(t) \tag{4.7}$$

calculamos,

$$\begin{aligned}\widehat{1_{B_\delta}}(x) &= c\,|x|^{-\frac{n-2}{2}} \int_1^{1+\delta} s^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\,|x|)\,\mathrm{d}\,s = \\ &= c\,|x|^{-(\frac{n-2}{2}+\frac{n+2}{2})} \int_1^{1+\delta} (2\pi\,|x|\,s)^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\,|x|\,s)\ (2\pi\,|x|)\,\mathrm{d}\,s = \\ &= c\,|x|^{-n} \int_1^{1+\delta} t^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(t)\,\mathrm{d}\,t = c\,|x|^{-n} \int_{2\pi|x|}^{2\pi|x|(1+\delta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(t^{n/2} J_{n/2}(t)\right)\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

y por tanto el límite anterior queda

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} \frac{\widehat{1_{B_\delta}(x)}}{\delta} &= \lim_{\delta\to 0} c\,|x|^{-n}\,\delta^{-1} \int_{2\pi|x|}^{2\pi|x|(1+\delta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(t^{n/2} J_{n/2}(t)\right)\mathrm{d}\,t = \\ &= c\,|x|^{-n} \lim_{\delta\to 0} \frac{t^{n/2} J_{n/2}(t)\big|_{2\pi|x|}^{2\pi|x|(1+\delta)}}{\delta} = \\ &= 2\pi c\,|x|^{1-n} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=2\pi|x|} \left(s^{n/2} J_{n/2}(s)\right) = \\ &= C\,|x|^{1-n}\,|x|^{n/2}\,J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\,|x|) = C\,|x|^{\frac{2-n}{2}}\,J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\,|x|).\end{aligned}$$

Finalmente, estimamos $\left|\widehat{\sigma^{n-1}}(x)\right|$,

$$\left|\widehat{\sigma^{n-1}}(x)\right| = \left|\lim_{\delta\to 0}\frac{\widehat{1_{B_\delta}(x)}}{\delta}\right| = C\,|x|^{\frac{2-n}{2}}\left|J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\,|x|)\right| \le K\,|x|^{\frac{1-n}{2}}.$$

La desigualdad que aparece en (4.5) se deduce de esta estimación junto con la identidad (4.4).

Lema 4.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de Borel, $n \ge 2$, y $\mu \in \mathcal{M}(A)$ una medida de Borel. Si $I_{(n+1)/2}(\mu) < \infty$ entonces $\delta(\mu)$ se identifica con una función continua.*

Demostración. Para demostrarlo, vamos a tomar $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\int \psi = 1$, y $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$. Definimos $\mu_\varepsilon = \psi_\varepsilon * \mu$. Entonces μ_ε tiende débilmente a μ cuando $\varepsilon \to 0$, de manera que $\delta(\mu_\varepsilon)$ tiende a $\delta(\mu)$ débilmente cuando $\varepsilon \to 0$. Utilizando (4.3) y la identidad de Parseval,

$$\begin{aligned}\delta(\mu_\varepsilon)(r) &= \int (\sigma_r^{n-1} * \mu_\varepsilon)\mu_\varepsilon = \int \widehat{(\sigma_r^{n-1} * \mu_\varepsilon)}\,\overline{\widehat{\mu_\varepsilon}} = \\ &= \int \widehat{\sigma_r^{n-1}}\,\widehat{\mu_\varepsilon}\,\overline{\widehat{\mu_\varepsilon}} = \int \widehat{\sigma_r^{n-1}}\,|\widehat{\mu_\varepsilon}|^2 = \int \widehat{\sigma_r^{n-1}}(x)\left|\widehat{\psi}(\varepsilon x)\right|^2 |\widehat{\mu}(x)|^2\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned}$$

Ahora, dado que $I_{(n+1)/2}(\mu) < \infty$, por el teorema 3.1 se tiene,

$$\int |x|^{\frac{1-n}{2}}\,|\widehat{\mu}(x)|^2\,\mathrm{d}\,x < \infty.$$

Utilizando esto junto con (4.5), tenemos

$$\begin{aligned}|\delta(\mu_\varepsilon)(r)| &\le \int \left|\widehat{\sigma_r^{n-1}}(x)\right|\left|\widehat{\psi}(\varepsilon x)\right|^2 |\widehat{\mu}(x)|^2\,\mathrm{d}\,x \le \\ &\le C r^{\frac{n-1}{2}}\,||\psi||_{L^1}\int |x|^{\frac{1-n}{2}}\,|\widehat{\mu}(x)|^2\,\mathrm{d}\,x < \infty\end{aligned}$$

y por el Teorema de Convergencia Dominada, llegamos a que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\mu_\varepsilon)(r) = \int \widehat{\sigma_r^{n-1}}\,|\widehat{\mu}|^2.$$

Por otro lado, como $\delta(\mu_\varepsilon) \to \delta(\mu)$ débilmente conforme $\varepsilon \to 0$, concluimos que

$$\delta(\mu)(r) = \int \widehat{\sigma_r^{n-1}}\,|\widehat{\mu}|^2.$$

Finalmente, se deduce que $\delta(\mu)(r)$ es continua por el Teorema de Convergencia Dominada y la continuidad de $\widehat{\sigma_r^{n-1}}(x)$. □

Lema 4.4. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de Borel, $n \ge 2$, y $\mu \in \mathcal{M}(A)$ una medida de Borel. Sean $R > 0$ tal que $\operatorname{sop}(\mu) \subset B(0,R)$, $0 < \eta < r < 2R$ y $0 < t \le 1$. Entonces*

$$\delta(\mu)([r, r+\eta]) \le C\gamma\left(n, \frac{n-1}{2} + t\right)^{-1} r^{\frac{n-1}{2}}\eta^t I_{\frac{n-1}{2}+t}(\mu).$$

Demostración. Calculamos, utilizando la definición de $\delta(\mu)$,

$$\delta(\mu)\left([r, r+\eta]\right) = \int \mu\left(\{y \in \mathbb{R}^n : r \leq |x-y| \leq r+\eta\}\right) \mathrm{d}\,\mu(x) = \int g_{r,\eta} * \mu \,\mathrm{d}\,\mu$$

donde $g_{r,\mu}$ es la función característica del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : r \leq |x| \leq r+\eta\}$. Aproximando μ por μ_ε como en la demostración anterior, se tiene, por la identidad de Parseval,

$$\delta(\mu_\varepsilon)\left([r, r+\eta]\right) = \int g_{r,\eta} * \mu_\varepsilon \,\mathrm{d}\,\mu_\varepsilon = \int \widehat{g_{r,\eta}}\, |\widehat{\mu_\varepsilon}|^2 .$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, tenemos

$$\delta(\mu)\left([r, r+\eta]\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \widehat{g_{r,\eta}}\, |\widehat{\mu_\varepsilon}|^2 = \int \widehat{g_{r,\eta}}\, |\widehat{\mu}|^2 .$$

Para justificar este límite es necesario aproximar $g_{r,\eta}$ por funciones continuas de soporte compacto, y usar el Lema de Fatou o el Teorema de Convergencia Dominada de manera similar a como hicimos para demostrar el teorema 3.1. Ahora, dado que $g_{r,\eta}$ es radial, aplicando (3.1) tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{g_{r,\eta}}(x) &= c\,|x|^{-(n-2)/2} \int_r^{r+\eta} J_{(n-2)/2}(2\pi\,|x|\,s) s^{n/2} \,\mathrm{d}\,s = \\ &= c\,|x|^{-n} \int_{r|x|}^{(r+\eta)|x|} J_{(n-2)/2}(2\pi u) u^{n/2} \,\mathrm{d}\,u.\end{aligned}$$

Utilizando (4.6), $\eta < r$ y la fórmula general para el binomio de Newton, llegamos a la estimación

$$\begin{aligned}|\widehat{g_{r,\eta}}(x)| &\leq c\,|x|^{-n} \int_{r|x|}^{(r+\eta)|x|} u^{(n-1)/2} \,\mathrm{d}\,u = \\ &= c\,|x|^{(1-n)/2} \left((r+\eta)^{(n+1)/2} - r^{(n+1)/2}\right) \leq C\,|x|^{(1-n)/2}\, r^{(n-1)/2} \eta.\end{aligned}$$

Podemos obtener otra estimación similar utilizando (4.7) y (4.6).

$$\begin{aligned}|\widehat{g_{r,\eta}}(x)| &= \left| c\,|x|^{-n} \int_{r|x|}^{(r+\eta)|x|} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u} \left(u^{n/2} J_{n/2}(2\pi u)\right) \mathrm{d}\,u \right| = \\ &= c\,|x|^{-n} \left| (u\,|x|)^{n/2} J_{n/2}(2\pi\,|x|\,u)\big|_{u=r}^{u=r+\eta} \right| \leq c r^{(n-1)/2}\,|x|^{-(n+1)/2} .\end{aligned}$$

Juntando estas estimaciones y el teorema 3.1 llegamos a

$$\begin{aligned}\delta(\mu)\left([r, r+\eta]\right) &\leq c r^{(n-1)/2} \eta \int_{\{x:\ |x| \leq 1/\eta\}} |x|^{(1-n)/2}\, |\widehat{\mu}(x)|^2 \,\mathrm{d}\,x + \\ &\quad + c r^{(n-1)/2} \int_{\{x:\ |x|>1/\eta\}} |x|^{-(n+1)/2}\, |\widehat{\mu}(x)|^2 \,\mathrm{d}\,x \leq \\ &\leq c r^{(n-1)/2} \eta^t \int_{\{x:\ |x| \leq 1/\eta\}} |x|^{(1-n)/2+t-1}\, |\widehat{\mu}|^2 \,\mathrm{d}\,x + \\ &\quad + c r^{(n-1)/2} \eta^t \int_{\{x:\ |x|>1/\eta\}} |x|^{-(n+1)/2+t}\, |\widehat{\mu}|^2 \,\mathrm{d}\,x = \\ &= c r^{(n-1)/2} \eta^t \int |x|^{(n-1)/2+t-n}\, |\widehat{\mu}|^2 \,\mathrm{d}\,x = \\ &= \gamma(n, (n-1)/2+t)^{-1} r^{(n-1)/2} \eta^t I_{(n-1)/2+t}(\mu).\end{aligned}$$

□

Con este lema ya tenemos las herramientas necesarias para probar el siguiente teorema.

Teorema 4.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de Borel, $n \geq 2$.*

(i) Si $\dim A > (n+1)/2$, *entonces* $\operatorname{Int} D(A) \neq \emptyset$.

(ii) Si $(n-1)/2 \leq \dim A \leq (n+1)/2$, *entonces* $\dim D(A) \geq \dim A - (n-1)/2$.

Demostración. Primero demostramos la parte *(i)*. Dado que $\dim A > (n+1)/2$, entonces, por el teorema 2.11, podemos encontrar $\mu \in \mathcal{M}(A)$ tal que $I_{(n+1)/2}(\mu) < \infty$. Utilizando el lema 4.3, $\delta(\mu)$ se identifica con una función continua, esto es, si $B \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de Borel,

$$\delta(\mu)(B) = \int_B \delta(\mu)(r)\,\mathrm{d}\,r$$

y $\delta(\mu)(r)$ es continua. Por tanto, utilizando, (4.1),

$$\delta(\mu)^{-1}\left((0,\infty)\right) = \{r \in \mathbb{R} :\ \delta(\mu)(r) > 0\} \subset \operatorname{sop}\delta(\mu) \subset D(\operatorname{sop}\mu) \subset D(A).$$

Finalmente, como $\delta(\mu)(r)$ es continua, $\delta(\mu)^{-1}\left((0,\infty)\right)$ es abierto (y no vacío) y está contenido en $D(A)$, luego $\operatorname{Int} D(A) \neq \emptyset$.

Ahora pasamos a la prueba de *(ii)*. Como $\dim D(A) \geq 0$ si $A \neq \emptyset$, podemos suponer $\dim A > (n-1)/2$. Sea $0 < t \leq 1$ tal que $\dim A > (n-1)/2 + t$. Entonces, por el teorema 2.11, podemos encontrar $\mu \in \mathcal{M}(A)$ con $\operatorname{sop}(\mu) \subset B(0,R)$ y $I_{\frac{n-1}{2}+t}(\mu) < \infty$. Utilizando el lema 4.4, se tiene

$$\delta(\mu)([r, r+\eta]) \leq C\eta^t,$$

para $0 < \eta < r < 2R$ y C una constante finita que depende de R y n. Sea $\varepsilon > 0$ y $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento de $D(A)$ por intervalos (bolas) cerrados de $\operatorname{diam} I_j < \varepsilon$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $I_j = [a_j, a_j + \eta_j]$. Para aquellos I_j con $a_j > \eta_j$ podemos estimar $\delta(\mu)(I_j)$ y razonar de manera similar a como hicimos en la primera parte de la demostración del Lema de Frostman. Sin embargo, para poder adaptar completamente ese razonamiento, necesitamos algo más de trabajo. Observamos que si $a_j \leq \eta_j < \varepsilon$, entonces $a_j + \eta_j < 2\varepsilon$, luego $I_j \subset [0, 2\varepsilon]$. Denoto $P = \{j :\ a_j > \eta_j\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum(\operatorname{diam} I_j)^t &= \sum_{j\in P}(\operatorname{diam} I_j)^t + \sum_{j\in P^c}(\operatorname{diam} I_j)^t \geq \sum_{j\in P}(\operatorname{diam} I_j)^t \geq \\ &\geq \sum_{j\in P} C\delta(\mu)(I_j) \geq C\delta(\mu)(D(A) \setminus [0,2\varepsilon]) \geq \\ &\geq C\left[\delta(\mu)(D(A)) - \delta(\mu)([0,2\varepsilon])\right],\end{aligned}$$

y tomando ínfimos sobre los cubrimientos de $D(A)$ y límites cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene $m_t(D(A)) \geq K\delta(\mu)(D(A)) > 0$. Así, $\dim D(A) \leq t < \dim A - (n-1)/2$. □

Ahora veremos cómo la parte *(i)* del teorema no se sostiene necesariamente si $\dim A < n/2$. Para ello, vamos a encontrar un conjunto C con dimensión $\dim C < n/2$ y $\dim C < 1$.

Ejemplo. Para $n \geq 2$ y $0 < \alpha < n/2$, existe un conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}^n$ con $\dim C = \alpha$ y $\dim D(C) < 2\alpha/n$.

Sea $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales que cumple $m_{k+1} \geq m_k^k$. Definimos

$$C_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leq x_j \leq 1 \text{ y } \exists p_j \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } |x_j - p_j/m_k| \leq m_k^{-n/\alpha}, \quad j = 1, ..., n\right\}.$$

Cada C_k es un conjunto formado por "pequeños cubos" alrededor de cada punto en la copia dilatada de $\mathbb{Z}^n$ que cae dentro o lo suficientemente cerca de $[0,1]^n$. Sea $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Entonces $\dim C = \alpha$ (ver Teorema 8.15, p. 132 de [6]).

También se tiene $D(C) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(C_k)$. Sea $d \in D(C)$ tal que $d = |x - x'| \in D(C_k)$ para x, x' con enteros p_j y p'_j, $j = 1, ..., n$ que satisfacen $|x_j - p_j/m_k| \leq m_k^{-n/\alpha}$ y $\left|x'_j - p'_j/m_k\right| \leq m_k^{-n/\alpha}$. Denotamos $p = (p_1, ..., p_n)$ y $p' = (p'_1, ..., p'_n)$. Entonces es fácil observar que

$$\left|d - |p/m_k - p'/m_k|\right| \leq 2nm_k^{-n/\alpha},$$

es decir, cada $d \in D(C)$ está contenido en un intervalo $I_{k,j}$ de radio $2nm_k^{-n/\alpha}$ y centro $|p/m_k - p'/m_k|$. Además, la cantidad de elementos en $D(C)$ que son de la forma $|p/m_k - p'/m_k|$ tiene que ser finita, ya que $|p/m_k| \leq 2n$ y $|p'/m_k| \leq 2n$ (se obtiene fácilmente de la definición de p, p'). Por tanto, basta conseguir una cota para la cantidad de distancias del tipo $|p - p'|$ para acotar la cantidad de intervalos que necesitamos para cubrir $D(C_k) \supset D(C)$. Para ello, como la función $x \mapsto x^2$ es biyectiva en $[0, \infty)$, tenemos,

$$\begin{aligned}\text{Card}\left\{|p - p'| : \ p, p' \in \mathbb{Z}^n, \ |p/m_k|, |p'/m_k| \leq 2n\right\} = \\ = \text{Card}\left\{|p - p'|^2 : \ p, p' \in \mathbb{Z}^n, \ |p/m_k|, |p'/m_k| \leq 2n\right\},\end{aligned}$$

y como $|p - p'|^2$ es un número entero y es como mucho $\leq 16n^2m_k^2$, este cardinal es menor o igual que $16n^2m_k^2$. Por tanto como mucho hay $16n^2m_k^2$ distancias distintas del tipo $|p - p'|$. Esto implica que no puede haber más de $16n^2m_k^2$ centros para los intervalos $I_{k,j}$, luego $D(C_K) \supset D(C)$ puede ser cubierto por $16n^2m_k^2$ intervalos de diámetro $4nm_k^{-n/\alpha}$. Así, se tiene

$$\begin{aligned}m_{2\alpha/n}(D(C)) &\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } I_{k,j})^{2\alpha/n} \leq \\ &\leq \lim_{k\to\infty} 16n^2m_k^2(4nm_k^{-n/\alpha})^{2\alpha/n} = 16n^2(4n)^{2\alpha/n} < \infty,\end{aligned}$$

de donde se deduce que $\dim(D(C)) \leq 2\alpha/n$.

El teorema 4.5 fue probado por Falconer [5], con la conclusión $m(D(A)) > 0$ en lugar de $\text{Int } D(A) \neq \emptyset$. Más tarde, Wolff [11] demostró que $m(D(A)) > 0$ se sigue de $\dim A > n/2 + 1/3$ si $n = 2$ y M. B. Erdoğan [3] lo probó para todo $n \geq 3$. En la actualidad, la conjetura de Falconer sigue abierta. El resultado más reciente sobre la conjetura de Falconer ha sido recientemente demostrado por Xiumin Du, Larry Guth, Yumeng Ou, Hong Wang, Bobby Wilson y Ruixiang Zhang [2].

Bibliografía

[1] L. Carleson, *Selected Problems on Exceptional Sets*, D. Van Nostrand Company, INC (1967).

[2] X. Du, L. Guth, Y. Ou, H. Wang, B. Wilson, R. Zhang, *Weighted restriction estimates and application to falconer distance set problem*, American Journal of Mathematics, Vol. 143 (2021), no. **1**, 175–211.

[3] M. B. Erdoğan, *A bilinear Fourier extension theorem and applications to the distance set problem*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. **23**, 1411–1425.

[4] L. C. Evans & R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press (1992).

[5] K. J. Falconer, *On the Hausdorff dimensions of distance sets*, Mathematika **32** (1985), 206–212.

[6] K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press (1985).

[7] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis, Third Edition*, Springer (2014).

[8] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press (1995).

[9] P. Mattila, *Fourier Analysis and Hausdorff Dimension*, Cambridge University Press (2015).

[10] E. M. Stein & R. Sakarchi, *Real Analysis*, Princeton University Press (2005).

[11] T. Wolff, *Decay of circular means of Fourier transforms of measures*, Int Math. Res. Not. **10** (1999), 547–567.

Apéndices

APÉNDICE A

La medida de Hausdorff y la medida de Lebesgue

A.1. Teorema 1.7

Demostración (Teorema 1.7). Es preciso demostrar que los conjuntos cerrados en X son medibles, y como μ^* es medida exterior, basta probar que para todo F cerrado y todo conjunto A, $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c)$. Sea $F \subset X$ un conjunto cerrado y $A \subset X$ con $\mu^*(A) < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \left\{ x \in F^c \cap A : \ d(x, F) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Así $A_n \subset A_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in F^c \cap A : \ d(x, F) > 0\}$. Como F es cerrado, $\{x : \ d(x, F) = 0\}$ está contenido en F, y, por tanto, $F^c = \{x : \ d(x, F) > 0\}$. Ahora, como $A_n \subset A$, $d(F, A_n) \geq 1/n$ y μ^* es una medida exterior métrica, se tiene

$$\mu^*(A) \geq \mu^*((F \cap A) \cup A_n) = \mu^*(F \cap A) + \mu^*(A_n).$$

Ahora basta comprobar que $\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(F^c \cap A)$ para terminar la demostración. Para esta parte defino $B_n = A_{n+1} \cap A_n^c$ y observo que

$$d(B_{n+1}, A_n) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)},$$

y como $B_{2k} \cup A_{2k-1} \subset A_{2k+1}$, se tiene

$$\mu^*(A_{2k+1}) \geq \mu^*(B_{2k} \cup A_{2k-1}) = \mu^*(B_{2k}) + \mu^*(A_{2k-1}),$$

donde hemos usado que μ es una medida exterior métrica. En particular esto implica que

$$\mu^*(A_{2k+1}) \geq \sum_{j=1}^{k} \mu^*(B_{2j})$$

y argumentando de la misma manera sobre A_{2k} se llega a

$$\mu^*(A_{2k}) \geq \sum_{j=1}^{k} \mu^*(B_{2j-1}).$$

Como $\mu^*(A) < \infty$ y $A_n \subset A$ entonces las series $\sum_j \mu^*(B_{2j})$ y $\sum_j \mu^*(B_{2j-1})$ son ambas convergentes y por tanto lo es también $\sum_j \mu^*(B_j)$. Además

$$A_n \subset F^c \cap A \subset A_n \cup \bigcup_{j=n}^{\infty} B_j,$$

luego

$$\mu^*(A_n) \leq \mu^*(F^c \cap A_n) \leq \mu^*(A_n) + \sum_{j=n}^{\infty} \mu^*(B_j)$$

y basta tomar límites para ver que $\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(F^c \cap A)$. □

A.2. Propiedad 1.12

Primero veremos la demostración de la propiedad 1.12 por ser más directa (y más corta). Para ello se presentan tres lemas previos y después la demostración de la propiedad.

Lema A.1. *Sea* $\mathbf{B} = \{B_1, ..., B_N\}$ *una colección finita de bolas abiertas en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces existe una sub–colección* $\{B_{i_1}, ..., B_{i_k}\} \subset \mathbf{B}$ *que satsiface*

$$m\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

Es decir, siempre podemos encontrar una sub–colección de bolas disjuntas que cubren una parte de lo que cubren las bolas de la colección original.

Lema A.1. Tomamos B_{i_1} en $B_1, ..., B_N$ como la bola de mayor radio. A continuación consideramos $\mathbf{B}'$ como la colección de bolas que resulta de eliminar B_{i_1} de $\mathbf{B}$ y aquellas que intersequen a B_{i_1}. Todas estas están contenidas en una bola $\tilde{B}_{i_1}$ con igual centro que B_{i_1} y de radio 3 veces el de B_{i_1}. Para $\mathbf{B}'$ hacemos el mismo procedimiento y obtenemos B_{i_2} y $\tilde{B}_{i_2}$, y continuamos haciendo esto como mucho N veces hasta conseguir la colección $\left\{B_{i_j}\right\}_{j=1}^{k}$ de bolas disjuntas. Para demostrar la desigualdad observamos que como toda bola B de $\mathbf{B}$ interseca a alguna de las B_{i_j} y su radio es menor que el de esta. Se tiene $B \subset \tilde{B}_{i_j}$ y por tanto

$$m\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} m(\tilde{B}_{i_j}) = 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

□

Definición A.2 *(Recubrimiento de Vitali). Una colección* $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *es un cubrimiento de Vitali de un conjunto* E *si para cada* $x \in E$ *y cada* $\eta > 0$ *existe una bola* B_α *de al colección tal que* $x \in B_\alpha$ *y* $m(B_\alpha) < \eta$*.*

Lema A.3. *Sea* E *un conjunto de medida finita y* $\mathcal{B}$ *un cubrimiento de Vitali de* E*. Entonces para todo* $\delta > 0$ *existen* $B_1, ..., B_N$ *bolas de* $\mathcal{B}$ *disjuntas y tales que*

$$\sum_{i=1}^{N} m(B_i) \geq m(E) - \delta.$$

Demostración. Dado $\delta > 0$, comenzamos tomando cierto $E' \subset E$ compacto apropiado para tener $m(E') \geq \delta$. Por ser compacto, podemos encontrar un sub–recubrimiento finito de $\mathcal{B}$ que recubre E', y por el lema A.1, de este recubrimiento podemos extraer una sub–colección de bolas $B_1, ..., B_{N_1}$ tales que $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geq 3^{-n} m(E') \geq 3^{-n}\delta$.

Ahora consideramos dos posibles opciones: o bien $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geq m(E) - \delta$, en cuyo caso ya habríamos terminado y basta tomar $N = N_1$, o bien $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) < m(E) -$

δ. En este caso vamos a considerar $E_2 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}$, y como $m(B_i) = m(\overline{B_i})$, tenemos $m(E_2) > \delta$. Ahora volvemos a repetir el procedimiento anterior: escogemos E_2' compacto y con $m(E_2') \geq \delta$, y como las bolas de $\mathcal{B}$ que no intersecan a $\bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}$ siguen cubriendo E_2 podemos hacer lo mismo que antes y encontrar $B_{N_1+1}, ..., B_{N_2}$ tales que $\sum_{i=N_1+1}^{N_2} m(B_i) \geq 3^{-n}\delta$ y así llegamos a la colección $\{B_i\}_{N_2}$ que cumple $\sum_{i=1}^{N_2} m(B_i) \geq (2/3^n)\delta$.

Llegados a este punto podemos hacer lo mismo para elegir N_3 y continuar o darnos cuenta de que podemos parar. Si seguimos iterando hasta la k-ésima etapa y no hubiésemos parado antes, llegaríamos a una colección finita de bolas cuyas medidas suman una cantidad menor o igual que $(k/3^n)\delta$, y podríamos seguir hasta conseguir que $(k/3^n)\delta \geq (m(E) - \delta)$, y en ese caso tendríamos lo que buscamos,

$$\sum_{i=1}^{N_k} m(B_i) \geq m(E) - \delta.$$

□

Observación. En el lema anterior podemos elegir las bolas para que estén contenidas en A (esto es porque el cubrimiento es de Vitali) y de manera que $m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) < 2\delta$. De hecho, podemos elegir un abierto A tal que $E \subset A$ con $m(A \setminus E) < \delta$ y por tanto $\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \cup \bigcup_{i=1}^{N} B_i \subset A$ es una unión disjunta. Así, se tiene

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \leq m(A) - \sum_{i=1}^{N} m(B_i) \leq m(E) + \delta - (m(E) - \delta) = 2\delta.$$

Lema A.4. *Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$, para todo $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento por bolas $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ de E tal que* $\operatorname{diam} B_j < \delta$ *y $\sum_j m(B_j) \leq m(E) + \varepsilon$.*

Demostración. Utilizando la observación anterior, primero consideramos E medible, con lo cual dado $\varepsilon' > 0$ elegimos A abierto tal que $E \subset A$ y $m(A \setminus E) < \varepsilon'$ y $B_1, ..., B_N$ tales que $m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) < 2\varepsilon$. Teniendo esto en cuenta, llamando $U = \bigcup_{i=1}^{N} B_i$ y dado que $U \subset (U \setminus E) \cup E$ es una unión disjunta y $E \cup (U \setminus E) \subset A$ también es disjunta, se tiene

$$m(U) \leq m(U \setminus E) + m(E) \leq m(A \setminus E) + m(E) < m(E) + \varepsilon'.$$

Ahora para terminar de cubrir E falta cubrir $U \setminus E$, cuya medida es $2\varepsilon'$. Para ello tomamos $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ una colección de cubos de lado $l_j > 0$ que cubren $U \setminus E$ y con $\sum_j l_j^n < 3\varepsilon'$ (lo podemos hacer por la definición de la medida de Lebesgue). Ahora cada uno de los Q_j está contenido en una bola de radio l_j, digamos B_j', de manera que podemos recubrir $U \setminus E$ por la colección $\left\{B_j'\right\}_{j=1}^{\infty}$ y como $m(B_j') = al^n$ para algún $a \in \mathbb{R}$ entonces $\sum_j m(B_j') < a\varepsilon'$. Por tanto E queda recubierto por $\{B_j\}$, la unión de ambas familias de bolas, que además cumple

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(B_j) < (3 + a)\varepsilon' < \varepsilon$$

tomando ε' adecuadamente, y esto vale para todo $\varepsilon > 0$. Además, por ser un recubrimiento de Vitali, podemos ajustar el diámetro de las primeras N bolas como queramos (para que sea menor que $\delta > 0$ para cualquier elección de δ), y para el resto de bolas basta tomar $2\sqrt{2}l \leq \delta$. □

A.3. Propiedad 1.11

Para demostrar la propiedad 1.11 es necesaria la desigualdad isodiamétrica, y para demostrarla es necesario ver la simetrización de Steiner. Por esa razón esta parte vendrá dividida tres etapas. La primera tratará la simetrización de Steiner y las propiedades que vamos a necesitar, en la segunda se ve (y se prueba) la desigualdad isodiamétrica, y la tercera trata la demostración de la proposición en sí.

A.3.1. Simetrización de Steiner

La idea tras la simetrización de Steiner es fácil de visualizar en $\mathbb{R}^2$. Dado Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^2$ (en general en $\mathbb{R}^n$), cortar Ω con una recta L (en general con un hiperplano L) y considerar las secciones formadas por la intersección de Ω con las rectas perpendiculares a L, R_b (que parten de cada punto $b \in L \cap \Omega$). Esto resulta en varios segmentos, que se disponen de manera que el punto medio del segmento quede sobre L en el punto $b = L \cap R_b$. Intuitivamente lo que conseguimos con esto es construir un conjunto con la misma medida que Ω pero que tiene mejores propiedades que Ω.

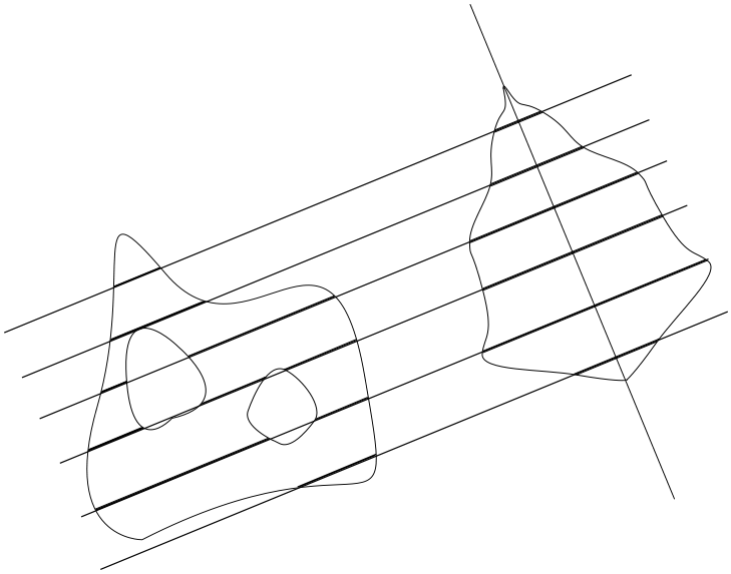


Figura A.1: Simetrización de Steiner

Ahora vamos a ver cómo formalizar esta idea y cuáles son las propiedades que tiene y nos pueden interesar para demostrar la proposición.

Definición A.5. *Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $\|a\| = 1$, definimos*

1. $L_b^a = \{b + ta : \ t \in \mathbb{R}\}$ *la línea con dirección a y que pasa por b.*
2. $P_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \cdot a = 0\}$ *el hiperplano perpendicular a $\{a\}$ (y que pasa por el origen).*

Esta definición únicamente introduce la notación que utilizaremos a lo largo de esta sección. A continuación definimos la simetrización de Steiner.

Definición A.6 *(Simetrización de Steiner). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$ con $\|a\| = 1$. Se define la simetrización de Steiner de A con respecto a P_a como*

$$S_a(A) = \bigcup_{\substack{b \in P_a \\ A \cap L_b^a \neq \emptyset}} \left\{ b + ta : \ |t| \leq \frac{1}{2} m_1^*(A \cap L_b^a) \right\}.$$

Proposición A.7 *(Propiedades de la Simetrización de Steiner). Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$ con $\|a\| = 1$. Entonces*

I. $\operatorname{diam} E \leq \operatorname{diam} S_a(E)$.

II. Si E es Lebesgue-medible, también lo es $S_a(E)$ y $m(S_a(E)) = m(E)$.

Demostración.

Prueba de *I*

Podemos suponer $\operatorname{diam} E < \infty$ y E cerrado, pues $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \overline{E}$. Fijado $\varepsilon > 0$, tomamos $x, y \in S_a(E)$ tales que

$$\operatorname{diam} S_a(E) \leq \|x - y\| + \varepsilon.$$

Escribimos $b = x - (x \cdot a)a$ y $c = y - (y \cdot a)a$, de manera que $b, c \in P_a$. Ahora definimos $r = \text{ínf}\,\{t : \ b + ta \in E\}$, $s = \sup\{t : \ b + ta \in E\}$, $u = \text{ínf}\,\{t : \ c + ta \in E\}$ y $v = \sup\{t : \ c + ta \in E\}$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir $v - r \geq s - u$. Así,

$$\begin{aligned} v - r &\geq \frac{1}{2}(v - r) + \frac{1}{2}(s - u) \geq \frac{1}{2}(s - r) + \frac{1}{2}(v - u) \\ &\geq \frac{1}{2} m_1^*(E \cap L_b^a) + \frac{1}{2} m_1^*(E \cap L_c^a). \end{aligned}$$

Ahora bien $\|x \cdot a\| \leq (1/2) m_1^*(E \cap L_b^a)$ y $\|y \cdot a\| \leq (1/2) m_1^*(E \cap L_c^a)$ de manera que

$$v - r \geq \|x \cdot a\| + \|y \cdot a\| \geq \|x \cdot a - y \cdot a\|.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} (\operatorname{diam} S_a(E) - \varepsilon)^2 \leq \|x - y\|^2 &= \|b - c\|^2 + \|x \cdot a - y \cdot a\|^2 \leq \\ &\leq \|b - c\|^2 + (v - r)^2 = \|(b + ra) - (c + va)\|^2 \leq \\ &\leq (\operatorname{diam} E)^2 \end{aligned}$$

ya que por ser E cerrado, $b + ra, c + va \in E$. Como la elección de ε es arbitraria, se tiene $\operatorname{diam} S_a(E) \leq \operatorname{diam} E$. Además hemos utilizado que la medida de Hausdorff de un segmento en $\mathbb{R}^n$ es su longitud. Esto es consecuencia directa de la propiedad 1.10 de la medida de Hausdorff.

Prueba de *II*

Dado que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es invariante por rotaciones, podemos asumir $a = e_n = (0, ..., 0, 1)$, y $P_a = P_{e_n}$ es una copia de $\mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}^n$. Definimos la siguiente función $f : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(b) = m_1^*(E \cap L_b^a)$. La función f es medible (pues E es medible y $L_b^{e_n}$ también) y por el Teorema de Fubini $m(E) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f$, y por tanto

$$S_a(E) = \left\{(b, y) : \ \frac{-f(b)}{2} \leq y \leq \frac{f(b)}{2}\right\} \setminus \{(b, 0) : \ L_b^a \cap E = \emptyset\}$$

es medible (es la "región bajo la gráfica de f"). Así,

$$m\left(S_a(E)\right) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f = m(E).$$

□

A.3.2. Desigualdad isodiamétrica

La desigualdad isodiamétrica establece que de entre todos los conjuntos de diámetro d, la bola (de diámetro d) es el de mayor volumen. Uno puede estar tentado a decir que todo conjunto de diámetro d está contenido en una bola de diámetro d, y con esto la desigualdad es fácil de demostrar, sin embargo esto no es cierto. Sin ir más lejos, un triángulo equilátero de diámetro d en el plano no está contenido en ninguna bola de diámetro d. Para probar este resultado se utiliza la simetrización de Steiner: se simetriza el conjunto con respecto a cada uno de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ para obtener un conjunto simétrico que tiene la misma medida que el conjunto original pero este sí está contenido en una bola de diámetro d.

Teorema *(Desigualdad Isodiamétrica). Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y B una bola de diámetro* $\operatorname{diam} B = \operatorname{diam} E$. *Entonces*

$$m(E) \leq m(B).$$

Demostración. Podemos suponer que $\operatorname{diam} E < \infty$. Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definimos $E_1 = S_{e_1}(E), E_2 = S_{e_2}(E_1), ..., E_n = S_{e_n}(E_{n-1})$ y $E^\star = E_n$ el resultado de haber simetrizado E con respecto a cada uno de los vectores de la base.

La primera observación que hacemos es que $E^\star$ es simétrico respecto del origen. Es decir, $x \in E^\star \Longrightarrow -x \in E^\star$. Para verlo es fácil darse cuenta de que E_1 es simétrico respecto de P_{e_1}. Fijado $k < n$ supongamos que E_k es simétrico respecto de $P_{e_1}, ..., P_{e_k}$. Para $k+1$ es fácil ver que $E_{k+1} = S_{e_{k+1}}(E_k)$ es simétrico respecto de $P_{e_{k+1}}$. Queremos ver que también lo es respecto de todos los P_{e_j} para $1 \leq j \leq k$. Para ello, fijamos j. Definimos $S_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ para que sea la reflexión respecto P_{e_j}. Sea $b \in P_{e_{k+1}}$. Dado que E_k es simétrico respecto de P_{e_j}, se tiene $S_j(E_k) = E_k$ y como S_j es inyectiva, es una isometría (por tanto conserva el diámetro) y $S_j(L_b^{e_{k+1}}) = L_{S_j(b)}^{e_{k+1}}$. Tenemos

$$m_1^*\left(E_k \cap L_b^{e_{k+1}}\right) = m_1^*\left(S_j(E_k \cap L_b^{e_{k+1}})\right) = m_1^*\left(E_k \cap L_{S_j(b)}^{e_{k+1}}\right)$$

y por tanto

$$\{t:\ b+te_{k+1}\in E_{k+1}\}=\{t:\ S_j(b)+te_{k+1}\in E_{k+1}\}\,.$$

Así $E_{k+1}=S_j(E_{k+1})$ y E_{k+1} es simétrico respecto de P_{e_j} y por inducción llegamos a que $E^\star$ es simétrico respecto de $P_{e_1},...,P_{e_n}$ y por tanto lo es respecto del origen.

La segunda parte de la prueba consiste en utilizar lo que acabamos de probar para ver que $E^\star$ está contenido en una bola de diámetro el de $E^\star$. Observamos que, al ser $E^\star$ simétrico respecto del origen, si $x\in E^\star$ entonces $-x\in E^\star$ y por tanto $\operatorname{diam}E^\star\geq 2\|x\|$ para todo $x\in E^\star$. Esto es

$$\forall x\in E^\star:\quad \|x\|\leq\frac{\operatorname{diam}E^\star}{2},$$

luego $E^\star\subset B'=B(0,\operatorname{diam}E^\star/2)$.

Para terminar, vamos a ver que $m(E)\leq m(B)$. Observamos lo siguiente,

$$m(E)=m(E^\star)\leq m(B')=a\left(\frac{\operatorname{diam}E^\star}{2}\right)^n\leq a\left(\frac{\operatorname{diam}E}{2}\right)^n=m(B)$$

para alguna constante $a\in\mathbb{R}$ (que depende de n), y B la bola que aparece en el enunciado (centrada en el origen). □

A.3.3. Propiedad 1.11

Ahora que podemos utilizar la desigualdad isodiamétrica vamos a demostrar la propiedad que nos ocupa.

Demostración (Proposición 1.11). Comenzamos viendo que $m(E)\leq c_n m_n(E)$. Dado $\delta>0$ elegimos una familia $\{F_k\}_{k=1}^\infty$ que recubre E y con $\operatorname{diam}F_k<\delta$. Utilizando la desigualdad isodiamétrica

$$m(E)\leq\sum_{k=1}^\infty m(F_k)\leq\sum_{k=1}^\infty c_n(\operatorname{diam}F_k)^n$$

y si tomamos ínfimos

$$m(E)\leq c_n\,\text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^\infty(\operatorname{diam}F_k)^n:\ E\subset\bigcup_{k=1}^\infty F_k,\ \operatorname{diam}F_k<\delta\right\}=c_n\mathcal{H}_n^\delta(E).$$

Basta tomar el límite cuando $\delta\to 0$ para conseguir la desigualdad.

Para la desigualdad contraria no hace falta trabajar más, ya que nos la garantiza la primera desigualdad de la proposición 1.12. □

APÉNDICE B
El triángulo de Sierpinski

Lo que vamos a demostrar en este apéndice es que la dimensión de Hausdorff de $\mathcal{S}$ es $\log 3/\log 2$. Para ello conviene recordar la definición de $\mathcal{S}$, dada en el apartado 1.4.2. La demostración de este resultado es similar a la que más adelante veremos de un teorema que establece cuál es la dimensión de Hausdorff de ciertos conjuntos (entre los cuales se encuentran $\mathcal{C}$ y $\mathcal{S}$). Vamos a introducir algo de notación y enunciar un lema para poder probar el resultado más adelante.

Notación. Diremos que el vértice inferior izquierdo de un triángulo es el vértice del triángulo. Notemos que con esta elección, en el paso k de la construcción de $\mathcal{S}$ se tienen 3^k vértices.

Lema B.1. *Sean $\delta > 0$ y $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^N$ un cubrimiento de $\mathcal{S}$ por bolas de diámetro menor que δ y sea $k \in \mathbb{N}$. Si $B \in \mathcal{B}$ es tal que*

$$2^{-l} \leq \operatorname{diam} B_j \leq 2^{-l+1}$$

para algún $l \leq k$ entonces B contiene como mucho $c3^{k-l}$ vértices del paso k.

Aquí c denota una constante cuyo valor no es especialmente relevante para lo que vamos a querer demostrar. Antes de nada conviene ver que podemos recubrir $\mathcal{S}$ por bolas de diámetro menor que δ, y por ser compacto siempre podremos extraer un recubrimiento finito, de manera que siempre estaremos en las primeras condiciones del lema.

Demostración (Lema B.1). Sea B^* la bola concéntrica a B pero cuyo diámetro es 3 veces el de B. Sea Δ_k un triángulo del paso k cuyo vértice v se mantiene en B. Si Δ_l' denota un triángulo del paso l que contiene a Δ_k, entonces como $\operatorname{diam} B \geq 2^{-l}$, se tiene $\Delta_l' \subset B^*$ y en particular $v \in \Delta_k \subset \Delta_l' \subset B^*$.

Ahora veamos que B^* puede contener como mucho c triángulos distintos del paso l. Estos triángulos tienen interiores disjuntos y su área es $c'4^{-l}$, y B^* tiene área menor o igual que $c''4^{-l}$, de manera que como c' y c'' son comparables, como mucho en B^* hay c triángulos distintos del paso l.

Por último, como cada Δ_l' contiene 3^{k-l} triángulos del paso k, B puede contener, como mucho, $c3^{k-l}$ vértices de triángulos del paso l. □

Teorema *(Dimensión de $\mathcal{S}$). El triángulo de Sierpinski $\mathcal{S}$ tiene dimensión de Hausdorff $\alpha = \log 3/\log 2$.*

Para demostrarlo vamos a comprobar que $0 < m_\alpha(\mathcal{S}) < \infty$ para $\alpha = \log 3/\log 2$, de manera similar a como hemos demostrado el anterior teorema.

Demostración. La desigualdad $m_\alpha(\mathcal{S}) \leq 1$ se sigue de la construcción de $\mathcal{S}$. Dado $\delta > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-K} < \delta$. Como $\mathcal{S}_K$ cubre $\mathcal{S}$ y está formado por 3^K triángulos de diámetro $2^{-K} < \delta$, tenemos

$$\mathcal{H}^\delta_\alpha(\mathcal{S}) \leq 3^K(2^{-K})^\alpha = 1.$$

La desigualdad $m_\alpha(\mathcal{S}) > 0$ es algo más complicada de demostrar. Es fácil observar que cualquier conjunto que forme parte de un recubrimiento por conjuntos de diámetro menor que $\delta/2$ está contenido en una bola de diámetro δ y por tanto basta demostrar que si $\{B_j\}_{j=1}^N$ es un cubrimiento de $\mathcal{S}$ (que es compacto) por bolas con $\operatorname{diam} B_j < \delta$, entonces

$$\sum_{j=1}^{N}(\operatorname{diam} B_j)^\alpha \geq c > 0.$$

Podemos suponer que tenemos tal recubrimiento. Consideramos el mínimo diámetro de B_j y elegimos k de manera que

$$2^{-k} \leq \min_{1\leq j\leq N} \operatorname{diam} B_j < 2^{-k+1}.$$

Ahora si N_l denota el número de bolas que satisfacen $2^{-l} \leq \operatorname{diam} B_j \leq 2^{-l+1}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{N}(\operatorname{diam} B_j)^\alpha \geq \sum_l N_l 2^{-l\alpha},$$

y por el lema B.1 el número total de vértices de triángulos del paso k que pueden cubrirse por $\{B_j\}$ es menor o igual que $c\sum_l N_l 3^{k-l}$. Como los 3^k vértices del paso k están en $\mathcal{S}$ y todos los vértices están cubiertos por $\{B_j\}$,

$$c\sum_l N_l 3^{k-l} \geq 3^k,$$

de donde se obtiene

$$\sum_l N_l 3^{-l} \geq c'.$$

Ahora, recordando que α es tal que $2^\alpha = 3$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{N}(\operatorname{diam} B_j)^\alpha \geq \sum_l N_l 2^{-l\alpha} = \sum_l N_l 3^{-l} \geq c' > 0.$$

Tomando ínfimos sobre los cubrimientos y el límite cuando $\delta \to 0$, se tiene la desigualdad que deseamos para terminar la prueba. □

APÉNDICE C
Distancia de Hausdorff

A continuación presentamos la prueba de la proposición 1.25. Para entenderla conviene recordar la definición 1.24.

Demostración (Proposición 1.25).

Prueba de *I*

La implicación de derecha a izquierda es muy sencilla de comprobar, y para la contraria, $0 = d_H(A, B)$ implica

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \left\{ \delta : \ A \subset B^{\delta} \text{ y } B \subset A^{\delta} \right\} \text{ con } \delta < \varepsilon.$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, $A \subset B^{\varepsilon}$ y $B \subset A^{\varepsilon}$. Por tanto $B \subset \{x : \ d(x, A) = 0\} = A$ y $A \subset \{x : \ d(x, B) = 0\} = B$, luego $A = B$.

Prueba de *II*

Es trivial.

Prueba de *III*

La desigualdad triangular establece $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ para $a \in A, b \in B, c \in C$ cualesquiera. Por tanto si tomamos ínfimos en los $b \in B$, usamos $d(c, B) \leq \sup_{c \in C} d(c, B)$ y finalmente tomamos ínfimos en $c \in C$, llegamos a

$$d(a, B) \leq d(a, C) + \sup_{c \in C} d(c, B)$$

y usando $d(a, C) \leq \sup_{a \in A} d(a, C)$, se tiene

$$d(a, B) \leq \sup_{a \in A} d(a, C) + \sup_{c \in C} d(c, B).$$

Cada uno de los sumandos de la derecha se puede mayorar por el máximo

$$d(a, B) \leq \text{máx} \left\{ \sup_{a \in A} d(a, C), \sup_{c \in C} d(c, A) \right\} + \text{máx} \left\{ \sup_{c \in C} d(c, B), \sup_{b \in B} d(b, C) \right\}$$

y esto es lo mismo que

$$d(a, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B).$$

Tomando el supremo en los $a \in A$ se tiene

$$\sup_{a\in A} d(a,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B).$$

De manera similar podemos fijar b a la izquierda de la desigualdad triangular y llegamos a

$$\sup_{b\in B} d(b,A) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B).$$

Podemos estimar ambas cantidades por la suma de las distancias de Hausdorff, de manera que es posible estimar el máximo de ambas, $\text{máx}\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}$ por la misma cantidad, pero esto es $d_H(A,B)$, luego

$$d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B).$$

Prueba de *IV*

Para empezar vemos que

$$d_H\left(\tilde{S}(A), \tilde{S}(B)\right) = \text{máx}\left\{\sup_{s_A\in\tilde{S}(A)} d(s_A, \tilde{S}(B)), \sup_{s_B\in\tilde{S}(B)} d(s_B, \tilde{S}(A))\right\}$$

y

$$\sup_{s_A\in\tilde{S}(A)} d(s_A, \tilde{S}(B)) = \sup_{\substack{a\in A \\ i=1,\ldots,m}} d(S_i(a), \tilde{S}(B))$$
$$\sup_{s_B\in\tilde{S}(B)} d(s_B, \tilde{S}(A)) = \sup_{\substack{b\in B \\ j=1,\ldots,m}} d(S_j(b), \tilde{S}(A)).$$

Ahora, tomando ínfimos en $b \in B,\ j \in 1,...,m$,

$$d\left(S_i(a), \tilde{S}(B)\right) = \inf_{\substack{b\in B \\ j=1,\ldots,m}} d\left(S_i(a), S_j(b)\right) \leq \inf_{b\in B} d\left(S_i(a), S_i(b)\right) =$$
$$= r \inf_{b\in B} d(a,b) = rd(a,B)$$

y basta tomar supremos en $a \in A$ e $i = 1,...,m$

$$\sup_{\substack{a\in A \\ i=1,\ldots,m}} d\left(S_i(a), \tilde{S}(B)\right) \leq \sup_{a\in A} rd(a,B).$$

De manera similar se obtiene la desigualdad

$$\sup_{\substack{b\in B \\ j=1,\ldots,m}} d\left(S_i(b), \tilde{S}(A)\right) \leq \sup_{b\in B} rd(b,A).$$

Ahora volviendo la distancia de Hausdorff de $\tilde{S}(A)$ y $\tilde{S}(B)$ podemos hacer las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} d_H\left(\tilde{S}(A), \tilde{S}(B)\right) &= \text{máx}\left\{ \sup_{s_A \in \tilde{S}(A)} d(s_A, \tilde{S}(B)), \sup_{s_B \in \tilde{S}(B)} d(s_B, \tilde{S}(A)) \right\} \leq \\ &\leq \text{máx}\left\{ \sup_{a \in A} rd(a, B), \sup_{s_B \in \tilde{S}(B)} d(s_B, \tilde{S}(A)) \right\} \leq \\ &\leq \text{máx}\left\{ \sup_{a \in A} rd(a, B), \sup_{b \in B} rd(b, A) \right\} \leq \\ &\leq r d_H(A, B). \end{aligned}$$

□

APÉNDICE D
La transformada de Fourier

D.1. Cálculo de la transformada de una función radial

En esta parte veremos cómo se desarrolla el cálculo del cual se obtiene la expresión (3.1). Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es de la forma $f(x) = \psi(|x|)$ para alguna función $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$. Empezaremos introduciendo la fórmula de integración en coordenadas polares,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^\infty f(rx) r^{n-1}\,\mathrm{d}\,r \right) \mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(x). \tag{D.1}$$

Ahora, fijado $e \in \mathbb{S}^{n-1}$, y para cada $0 \leq \theta \leq \pi$, sea $S_\theta = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : \ e \cdot x = \cos\theta\}$. El conjunto S_θ es una esfera $(n-2)$–dimensional de radio $\operatorname{sen}\theta$. Si $x = (x_1, ..., x_n),\ e = (e_1, ..., e_n)$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i - e_i\cos\theta)^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \cos^2\theta \sum_{i=1}^n e_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i e_i \cos\theta = \\ &= 1 + \cos^2\theta - \cos\theta(x\cdot e) = 1 + \cos^2\theta - 2\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta.\end{aligned}$$

Así,

$$\sigma^{n-2}_{\operatorname{sen}\theta}(S_\theta) = b(n)(\operatorname{sen}\theta)^{n-2},$$

donde $b(n)$ es la medida de la esfera $(n-2)$–dimensional, $b(n) = \sigma^{n-2}(\mathbb{S}^{n-2})$. Además, $\bigcup_{\theta\in[0,\pi]} S_\theta = \mathbb{S}^{n-1}$, y es una unión disjunta, luego, para $g \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(x)\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(x) = \int_0^\pi \left(\int_{S_\theta} g(x)\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}_{\operatorname{sen}\theta} \right) \mathrm{d}\,\theta. \tag{D.2}$$

Vamos ahora con la transformada de f. Utilizando (D.1) y el teorema de Fubini, se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{f}(re) &= \int f(y) e^{-2\pi i r y\cdot e}\,\mathrm{d}\,y = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^\infty f(sx) s^{n-1} e^{-2\pi i r s x\cdot e}\,\mathrm{d}\,s \right) \mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(x) = \\ &= \int_0^\infty \psi(s) s^{n-1} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i r s e\cdot x}\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(x) \right) \mathrm{d}\,s.\end{aligned}$$

Dado que sobre cada $\theta \in [0,\pi]$ la función $e^{-2\pi irse\cdot x}$ es constante ($e\cdot x = \cos\theta$), la integral sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ se puede calcular más fácilmente de la siguiente manera utilizando (D.1).

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi irse\cdot x}\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(x) = \int_0^\pi e^{-2\pi irs\cos\theta}\sigma^{n-2}_{\operatorname{sen}\theta}(S_\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = \\ = b(n)\int_0^\pi e^{-2piirs\cos\theta}(\operatorname{sen}\theta)^{n-2}.$$

Ahora, introduciendo el cambio de variable $\cos\theta \mapsto -t$, llegamos a

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi irse\cdot x}\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(x) = b(n)\int_{-1}^1 e^{2\pi irst}(1-t^2)^{(n-3)/2}\,\mathrm{d}\,t.$$

Llegamos a este punto, vemos que la integral se puede expresar en funciçon de las funciones de Bessel $J_m : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ para $m > -1/2$, dadas por

$$J_m(u) = \frac{(u/2)^m}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)}\int_{-1}^1 e^{iut}(1-t^2)^{m-1/2}\,\mathrm{d}\,t. \tag{D.3}$$

De esta manera,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi irse\cdot x}\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}(x) = c(n)(rs)^{-(n-2)/2}J_{(n-2)/2}(2\pi rs).$$

Basta introducir esto en el cálculo de $\widehat{f}(re)$ para llegar a la expresión (3.1) (con $x = re$, para cada $e \in \mathbb{S}^{n-1},\ r > 0$).

D.2. Estimación del teorema 3.1

Vamos a estructurar la demostración de la estimación

$$\int\int k_\alpha(y-x)\psi_\varepsilon(x-z)\psi_\varepsilon(y-w)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \leq C\,|z-w|^{-\alpha}$$

en tres partes. Suponemos $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geq 0$, $0 < \alpha < n$. Primero, demostramos la afirmación siguiente.

$$\exists C > 0 : \quad \int |x-y|^{-\alpha}\,\psi(y)\,\mathrm{d}\,y \leq C\,|x|^{-\alpha}\,. \tag{D.4}$$

Demostración. Separamos la integral en dos partes.

$$\int \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{\{|x-y|\geq|x|/2\}} \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(y)\,\mathrm{d}\,y + \int_{\{|x-y|<|x|/2\}} \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(y)\,\mathrm{d}\,y$$

Acotamos la primera integral.

$$\int_{\{|x-y|\geq|x|/2\}} \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(y)\,\mathrm{d}\,y \leq \int_{\{|x-y|\geq|x|/2\}} \frac{1}{\left(\frac{|x|}{2}\right)^\alpha}\psi(y)\,\mathrm{d}\,y \leq \\ \leq \int_{\{|x-y|\geq|x|/2\}} \frac{2^\alpha}{|x|^\alpha}\psi(y)\,\mathrm{d}\,y \leq \frac{2^\alpha}{|x|^\alpha}\int \psi(y)\,\mathrm{d}\,y = \frac{2^\alpha}{|x|^\alpha}\,||\psi||_{L^1} = C_1\frac{1}{|x|^\alpha}.$$

Acotamos ahora la segunda integral. Para ello, como $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, existe $D > 0$ tal que $\psi(y)\,|y|^n \leq D\ \forall y \in \mathbb{R}^n$, luego $\psi(y) \leq D\,|y|^{-n}$. Además, $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y| < |x|/2$, de manera que $|x|/2 < |y|$. Uniendo todo, tenemos que $\psi(y) \leq D(2^n/|x|^n)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\{|x-y|<|x|/2\}} \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(y)\,\mathrm{d}\,y &\leq \int_{\{|x-y|<|x|/2\}} \frac{1}{|x-y|^\alpha} D\frac{2^n}{|x|^n}\,\mathrm{d}\,y \underset{u=y-x}{=} \\
&= \frac{D2^n}{|x|^n}\int_{\left\{|u|<\frac{|x|}{2}\right\}} \frac{1}{|u|^\alpha} = \frac{D2^n}{|x|^n}\int_0^{\frac{|x|}{2}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{r^{n-1}}{r^\alpha}\,\mathrm{d}\,\sigma^{n-1}\,\mathrm{d}\,r = \\
&= \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})\frac{D2^n}{|x|^n}\int_0^{\frac{|x|}{2}} r^{n-1-\alpha}\,\mathrm{d}\,r = \\
&= \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})\frac{D2^n}{|x|^n}\frac{1}{n-\alpha}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{n-\alpha} = \\
&= \frac{D2^n}{n-\alpha}\sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})\frac{1}{|x|^\alpha} = C_2\frac{1}{|x|^\alpha}.
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos

$$\int \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(y)\,\mathrm{d}\,y \leq C_1\frac{1}{|x|^\alpha} + C_2\frac{1}{|x|^\alpha} = C\frac{1}{|x|^\alpha}.$$

□

Segundo, probamos lo siguiente,

$$\int\int \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(x-z)\psi(y-w)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \leq \frac{C^2}{|z-w|^\alpha}. \tag{D.5}$$

Demostración. Acotamos la integral interior,

$$\int \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(x-z)\,\mathrm{d}\,x \underset{u=x-z}{=} \int \frac{1}{|u+z-y|^\alpha}\psi(u)\,\mathrm{d}\,u$$

y utilizando (D.4), se tiene

$$\int \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(x-z)\,\mathrm{d}\,x \leq \frac{C}{|y-z|^\alpha}.$$

Ahora acotamos la integral exterior. Según acabamos de ver,

$$\int\int \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(x-z)\psi(y-w)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \leq \int \frac{C}{|y-w|^\alpha}\psi(y-w)\,\mathrm{d}\,y$$

y volviendo a aplicar (D.4),

$$\int\int \frac{1}{|x-y|^\alpha}\psi(x-z)\psi(y-w)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \leq \frac{C^2}{|z-w|^\alpha}$$

□

Finalmente, probamos la estimación que aparece en la demostración del teorema 3.1, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \int\int \frac{1}{|x-y|^\alpha} \psi_\varepsilon(x-z)\psi_\varepsilon(y-w)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \leq \frac{C^2}{|x-y|^\alpha}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\int\int \frac{1}{|x-y|^\alpha} \psi_\varepsilon(x-z)\psi_\varepsilon(y-w)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \underset{u=\frac{x}{\varepsilon}, v=\frac{y}{\varepsilon}}{=} \\
&\quad = \int\int \frac{1}{|\varepsilon u - \varepsilon v|^\alpha} \psi_\varepsilon\left(u - \frac{z}{\varepsilon}\right) \psi_\varepsilon\left(v - \frac{w}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v = \\
&\quad = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int\int \frac{1}{|u-v|^\alpha} \psi_\varepsilon\left(u - \frac{z}{\varepsilon}\right) \psi_\varepsilon\left(v - \frac{w}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.
\end{aligned}$$

Ahora aplicando (D.5) con u y v en lugar de x e y (respectivamente), y z/ε y w/ε en lugar de z y w (respectivamente), conseguimos

$$\int\int \frac{1}{|x-y|^\alpha} \psi_\varepsilon(x-z)\psi_\varepsilon(y-w)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \frac{C^2}{\left|\frac{z}{\varepsilon} - \frac{w}{\varepsilon}\right|^\alpha} = \frac{C^2}{|z-w|^\alpha}.$$

□